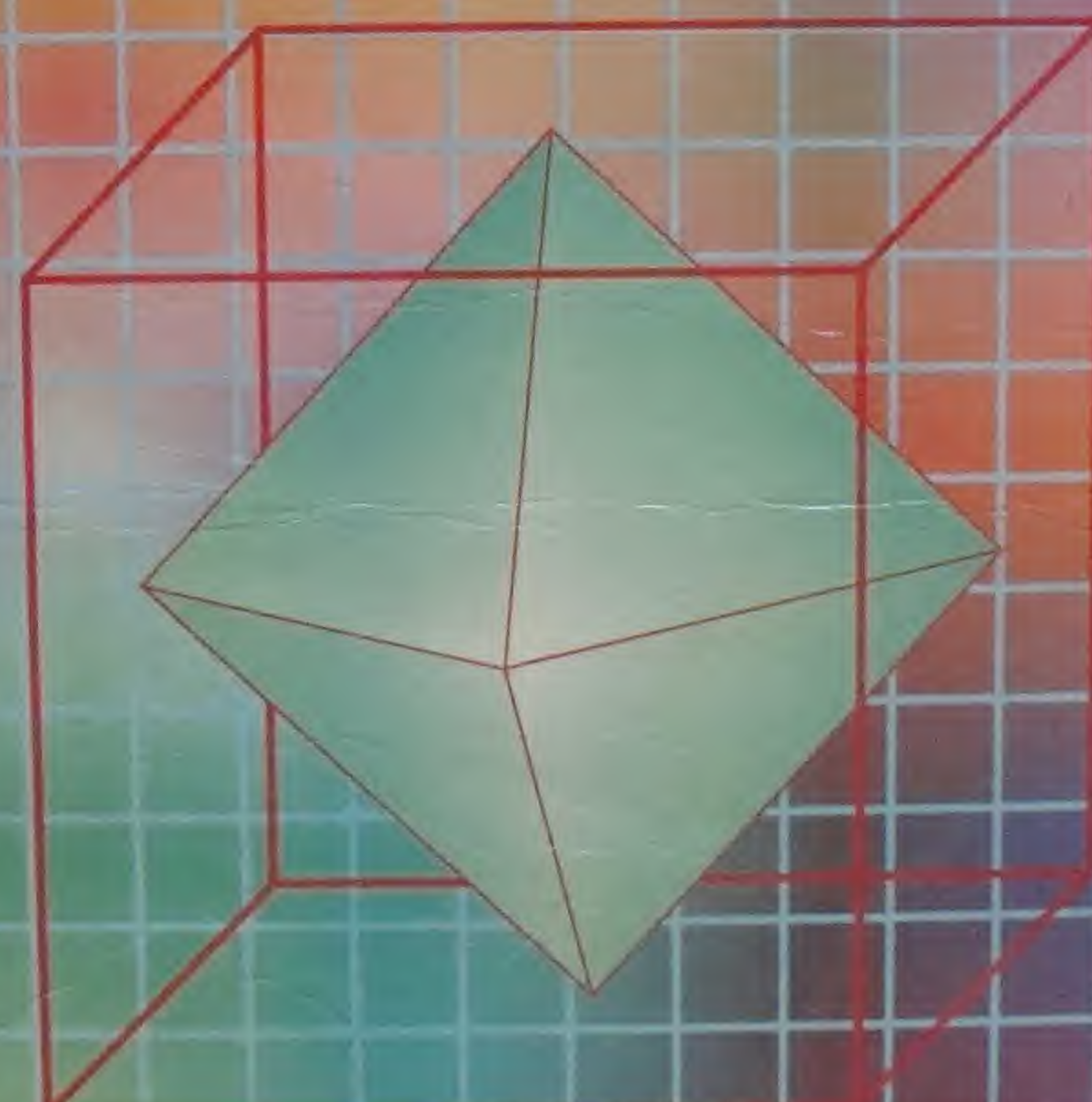
ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

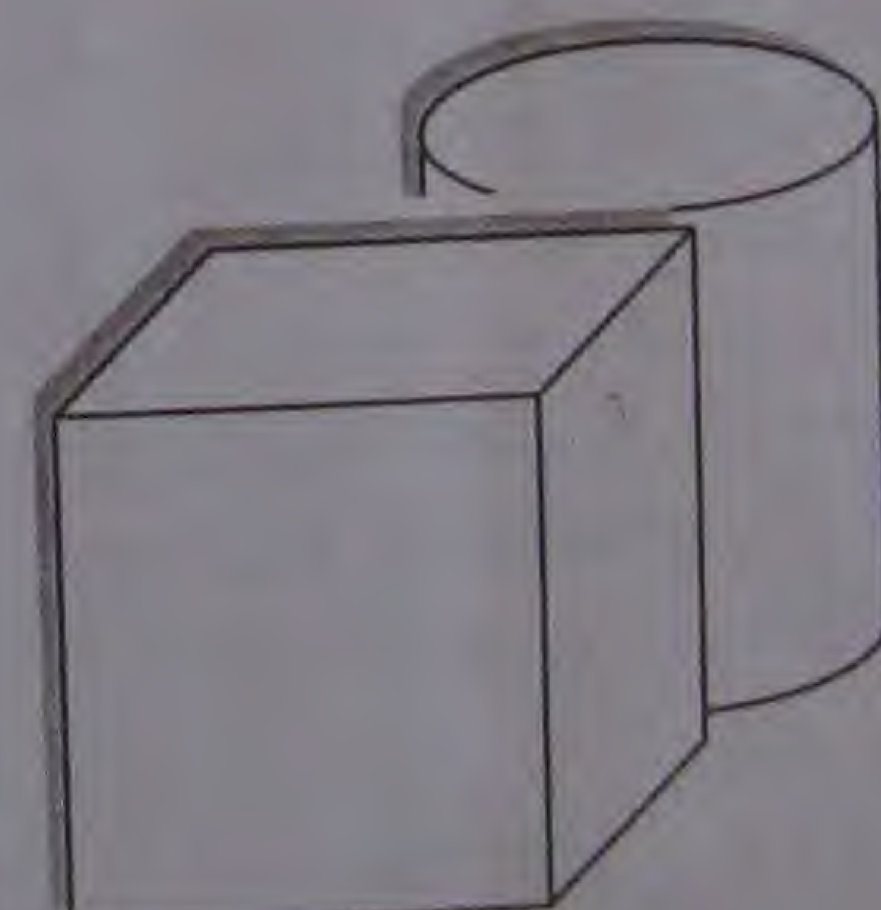


9

Լ. Ս. ԱԹԱՆԱՍՅԱՆ, Վ. Ֆ. ԲՈՒՏՈՒԶՈՎ,
Ս. Բ. ԿԱԴՈՄՑԵՎ, Լ. Ս. ԿԻՍԵԼՅՈՎԱ, Է. Գ. ՊՈԶՆՅԱԿ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ 9

Հանրակրթական դպրոցի 9-րդ դասարանի դասագիրք



Երևան, «Աստղիկ գրատուն»
2001թ.

ՀՏԴ 373.167.1:514(075)
ԳՄԴ 22.151g72
Ե 894

ԴԱՍԱԳԻՐՔԸ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ Է ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂՄԻՑ

Թարգմանված է ռուսերեն 9-րդ հրատարակությունից

Թարգմանությունը, փոխադրումը և խմբագրումը՝ Ս. Է. Հակոբյան

Մեթոդիստ՝ Ռ. Ս. Խաչատրյան
Խորհրդատվությունը՝ Ս. Ք. Հարությունյան

Ե 894 **Երկրաչափություն:** Հանրակրթական դպրոցի 9-րդ դասարանի դասագիրք / Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով, Ս. Բ. Կադոմցև և ուրիշ.; /թարգմ. և խմբ. Ս. Է. Հակոբյան. -- Եր., Աստղիկ գրատուն, 2001, -144 էջ:

Ե $\frac{4306020502}{860(01)-2001}$ 2001 ԳՄԴ 22.151g72

ISBN 99930-893-4-6

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

1 Տարածաչափության առարկան

Երկրաչափության դպրոցական դասընթացը բաղկացած է երկու մասից՝ հարթաչափությունից և տարածաչափությունից: Հարթաչափության մեջ ուսումնասիրվում է երկրաչափական պատկերների հատկությունները հարթության վրա: **Տարածաչափությունը երկրաչափության այն բաժինն է, որում ուսումնասիրվում են պատկերների հատկությունները տարածության մեջ:** Տարածաչափության անվանման մեջ ամփոփված են երկու բառ՝ «տարածություն» և «չափել», դա ինքնին ասում է նրա էության ու ծագման մասին:

Տարածության մեջ պարզագույն և, կարելի է ասել, հիմնական պատկերներ են **կետերը, ուղիղները, հարթությունները**: Այդ պատկերների հետ միասին մենք դիտարկելու ենք **երկրաչափական մարմինները** և դրանց **մակերևույթները**: Երկրաչափական մարմինների մասին պատկերացում են տալիս մեզ շրջապատող առարկաները: Օրինակ, բյուրեղներն ունեն այնպիսի երկրաչափական մարմինների ձև, որոնց մակերևույթները կազմված են բազմանկյուններից: Այդպիսի մարմինները կոչվում են **բազմանիստեր**: Պարզագույն բազմանիստերից մեկը խորանարդն է (նկ.1, ա): Հեղուկի կաթիլները անկշռության պայմաններում ընդունում են **գունդ** կոչվող երկրաչափական մարմնի ձևը (նկ.1, բ): Նույնպիսի ձև ունի նաև ֆուտբոլի գնդակը: Պահածոների ամաններից շատերն ունեն **գլան** կոչվող երկրաչափական մարմնի ձև (նկ.1, գ):

Ի տարբերություն իրական առարկաների, որոնց գոյությունը շոշափելիորեն ակնառու է, երկրաչափական մարմինները և երկրաչափական պատկերներն առհասարակ դիտվում են որպես երևակայական օբյեկտներ: Երկրաչափական մարմինը մենք պատկերացնում ենք որպես տարածության մի մաս, ընդ որում՝ այն մասը, որը տարածության մնացած մասից զատված է մակերևույթով, այսինքն՝ տվյալ մարմնի **սահմանով**: Այսպես, օրինակ՝ գնդի սահմանը **գնդային մակերևույթն** է (սֆերան), իսկ գլանի սահմանը կազմված է երկու շրջաններից (գլանի հիմքերը) և կողմնային մակերևույթից:

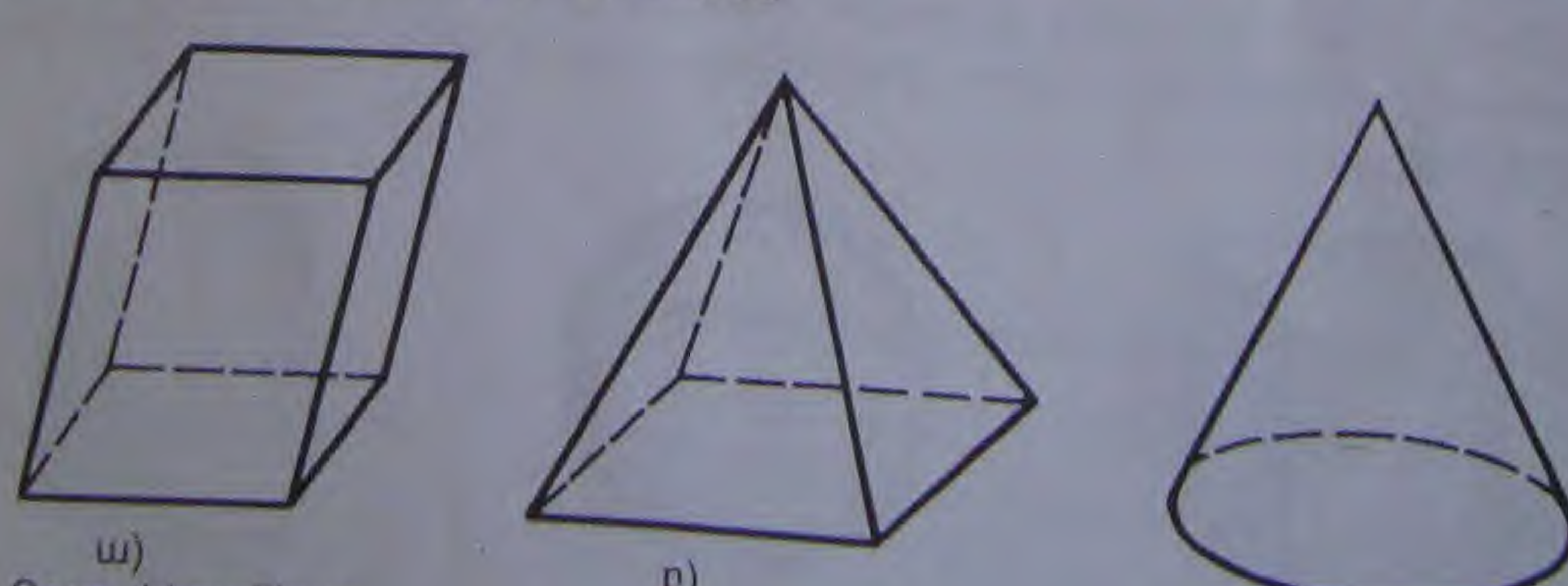
ա) Խորանարդ   բ) Գունդ   գ) Գլան

Նկ. 1

Երկրաչափական պատկերների՝ իբրև երևակայական օբյեկտների հատկությունների ուսումնասիրելով՝ մենք պատկերացումներ ենք կազմում իրական առարկաների երկրաչափական հատկությունների (դրանց ձևերի, փոխադարձ դասավորության և այլնի) մասին։ Իմանալով պատկերների հատկությունները՝ մենք կարող ենք դրանք օգտագործել գործնական նպատակներով։ Դրանով է արտահայտվում երկրաչափության կիրառական նշանակությունը։ Երկրաչափությունը, մասնավորապես տարածաչափությունը, լայն կիրառություն ունի շինարարական գործում, ճարտարապետության, մեքենաշինության, երկրաբանության մեջ, գիտության և տեխնիկայի բազմաթիվ այլ բնագավառներում։

Տարածական պատկերները, այդ թվում և երկրաչափական մարմինները ուսումնասիրելիս օգտվում են դրանց պատկերումից գծագրի վրա։ Նշենք, որ դրա համար անհրաժեշտ են որոշ հմտություններ։ Բանն այն է, որ գծագրի վրա կարող ենք պատկերել մարմնի միայն «ստվերը», քանի որ տարածական մարմինը հարթ թղթի վրա չի տեղավորվում։ Որպես կանոն, տարածական պատկերի համար իբրև գծապատկեր է ծառայում նրա պրոյեկցիան այս կամ այն հարթության վրա։ Միևնույն պատկերի համար հնարավոր են տարբեր գծապատկերներ։ Դրանցից, սովորաբար, ընտրվում է այն, որը ճիշտ պատկերացում է տալիս պատկերի ձևի մասին և առավել հարմար է նրա հատկությունների հետազոտման համար։ 2,ա և 2,բ նկարներում պատկերված են երկու բազմանիստեր՝ **զուգահեռանիստ** և **բուրգ,** իսկ 2,գ նկարում՝ **կոն**։ Դրանցում մարմինների չերևացող մասերը պատկերված են ընդհատ գծերով։ Տարածական պատկերների գծապատկերման կանոնները պարզաբանված են դասագրքի հավելվածում։

Նախապես տեղեկացնենք, որ 9-րդ դասարանում մենք ուսումնասիրելու ենք ուղիղների և հարթությունների փոխադարձ դասավորությունը, բազմանիստերը, ինչպես նաև վեկտորները տարածության մեջ։ 10-րդ դասարանում կուսումնասիրենք կոորդինատների մեթոդը տարածության մեջ, «կլոր» երկրաչափական մարմինները՝ գլանը, կոնը, գունդը, և կդիտարկենք մարմինների ծավալների հարցը։



ա) Զուգահեռանիստ

բ) Բուրգ

գ) Կոն

Նկ. 2

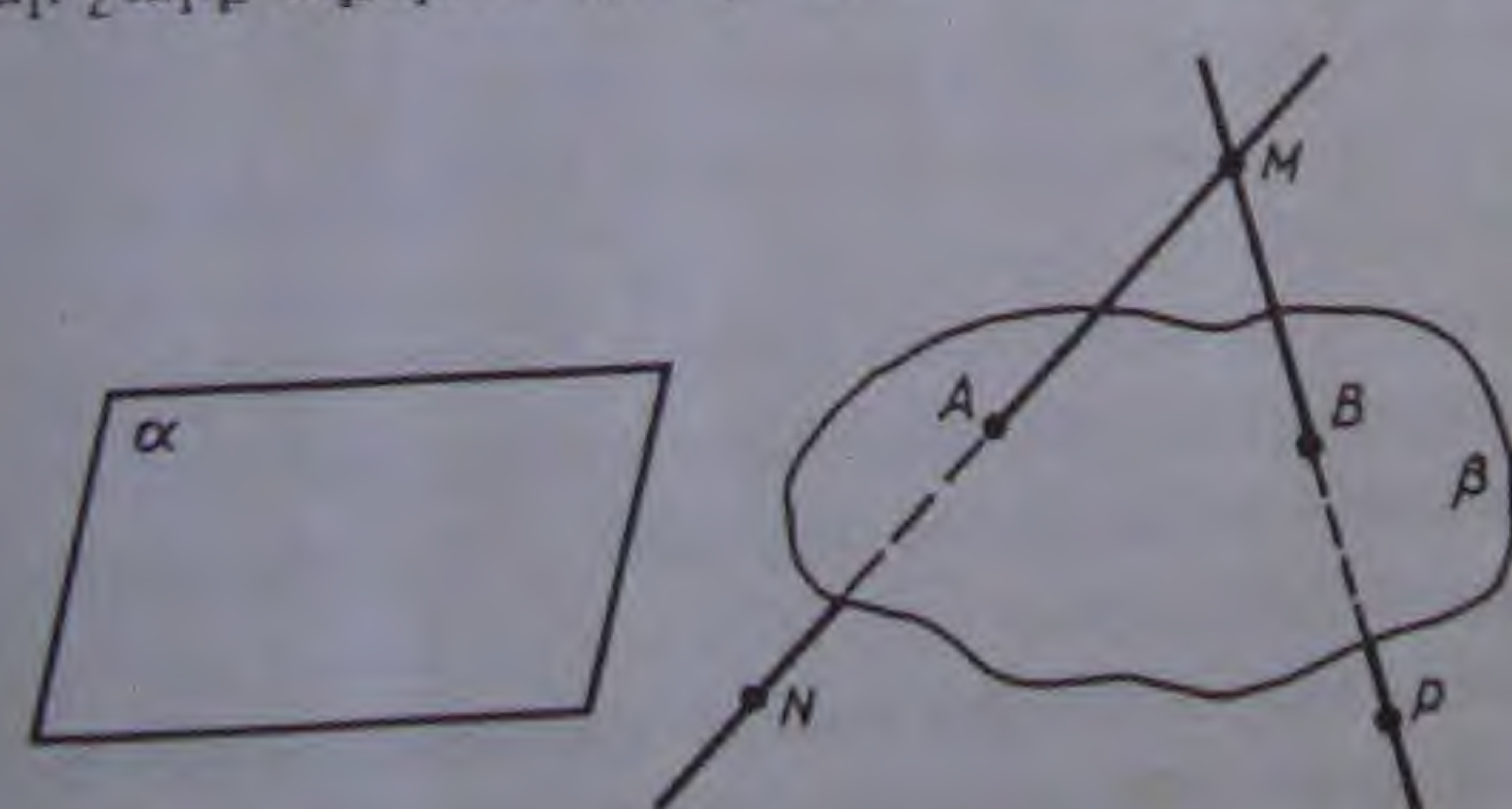
2 Տարածաչափության աքսիոմները

Հարթաչափության մեջ հիմնական պատկերներն են կետերը և ուղիղները: Տարածաչափության մեջ դրանց հետ միասին դիտարկվում է ևս մեկ հիմնական պատկեր՝ **հարթությունը**: Հարթության մասին պատկերացում է տալիս սեղանի կամ պատի հարթ մակերևույթը: Սակայն, իբրև երկրաչափական պատկեր՝ հարթությունը պետք է պատկերացնել որպես բոլոր կողմերում անսահմանափակ փռված:

Ինչպես և նախկինում՝ կետերը կնշանակենք լատինական մեծատառերով (A, B, C և այլն), իսկ ուղիղները՝ լատինական փոքրատառերով (a, b, c և այլն) կամ լատինական երկու մեծատառերով (AB, CD և այլն): Հարթությունները կնշանակենք հունական փոքրատառերով՝ α, β, γ և այլն: Նկարներում հարթությունները պատկերվում են ինչպես զուգահեռագծի (նկ.3, ա), այնպես էլ կամայական տիրույթի (նկ.3, բ) տեսքով:

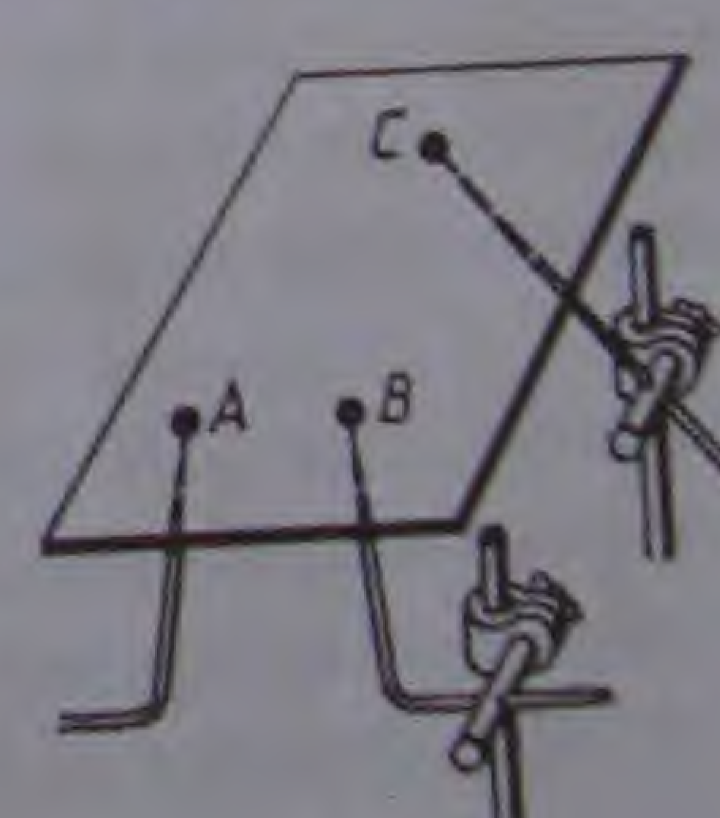
Հասկանալի է, որ ամեն մի հարթության մեջ ընկած են տարածության ինչ-որ կետեր, սակայն տարածության ոչ բոլոր կետերն են ընկած նույն հարթության մեջ: Այլ խոսքով, ինչպիսի հարթություն էլ դիտենք, տարածության մեջ կան այնպիսի կետեր, որոնք ընկած են այդ հարթության մեջ, և այնպիսի կետեր, որոնք այդ հարթության մեջ չեն ընկած: Օրինակ, 3,բ նկարում A և B կետերն ընկած են β հարթության մեջ (β հարթությունն անցնում է այդ կետերով), իսկ M, N, P կետերը այդ հարթության մեջ չեն ընկած: Դա համառոտ գրում են այսպես. $A \in \beta$, $B \in \beta$, $M \notin \beta$, $N \notin \beta$, $P \notin \beta$:

Կետերի, ուղիղների և հարթությունների փոխադարձ դասավորությանը վերաբերող հիմնական հատկությունները արտահայտվում են աքսիոմներով: Տարածաչափության աքսիոմների ողջ համակարգը բովանդակում է մի շարք աքսիոմներ, որոնց մեծ մասը մեզ արդեն ծանոթ է հարթաչափու-



ա) բ)

Նկ. 3



Ա-1 աքսիոմի լուսաբանումը. թիթեղը պահվում է մի ուղղի վրա չընկած A, B, C կետերով:

Նկ. 4

թյան դասընթացից: Աքսիոմների լրիվ ցանկը, ինչպես նաև դրանց որոշ հետևանքներ շարադրված են 10-րդ դասարանի դասագրքի հավելվածում: Այստեղ մենք կծանոթանանք ընդամենը երեք աքսիոմ տարածության մեջ կետերի, ուղիղների և հարթությունների փոխադարձ դասավորության մասին:

Ա-1. ***Մի ուղղի վրա չընկած ցանկացած երեք կետերով անցնում է հարթություն, ընդ որում՝ միայն մեկը:***

Այս աքսիոմը կարելի է լուսաբանել մի մոդելով, որը պատկերված է նկար 4-ում: Մի ուղղի վրա չընկած A, B, և C կետերով անցնող հարթությունը երբեմն անվանում են ABC հարթություն:

Նշենք, որ եթե վերցնենք ոչ թե երեք, այլ կամայական չորս կետեր, ապա դրանցով անցնող հարթություն կարող է գոյություն չունենալ: Այլ խոսքով՝ չորս կետեր կարող են և չգտնվել միևնույն հարթության մեջ: Անենքին, բերևս, ծանոթ է այդ փաստի այսպիսի ակնառու հաստատում. եթե աթոռի ոտքերի երկարությունները տարբեր են, ապա աթոռը կանգնում է երեք ոտքերի վրա, այսինքն հենվում է երեք «կետերի», իսկ չորրորդ ոտքի ծայրը (չորրորդ «կետը») չի հպվում հատակին, այլ մնում է օդում կախված՝ հատակի հարթությունից դուրս:

Ա-2. ***Եթե ուղղի երկու կետերն ընկած են հարթության մեջ, ապա ուղղի բոլոր կետերն ընկած են այդ հարթության մեջ:***

Այս դեպքում ասում են, որ **ուղիղն ընկած է հարթության մեջ** (**ուղիղը հարթության մեջ է**), կամ՝ **հարթությունն անցնում է ուղղով** (նկ.5,ա):

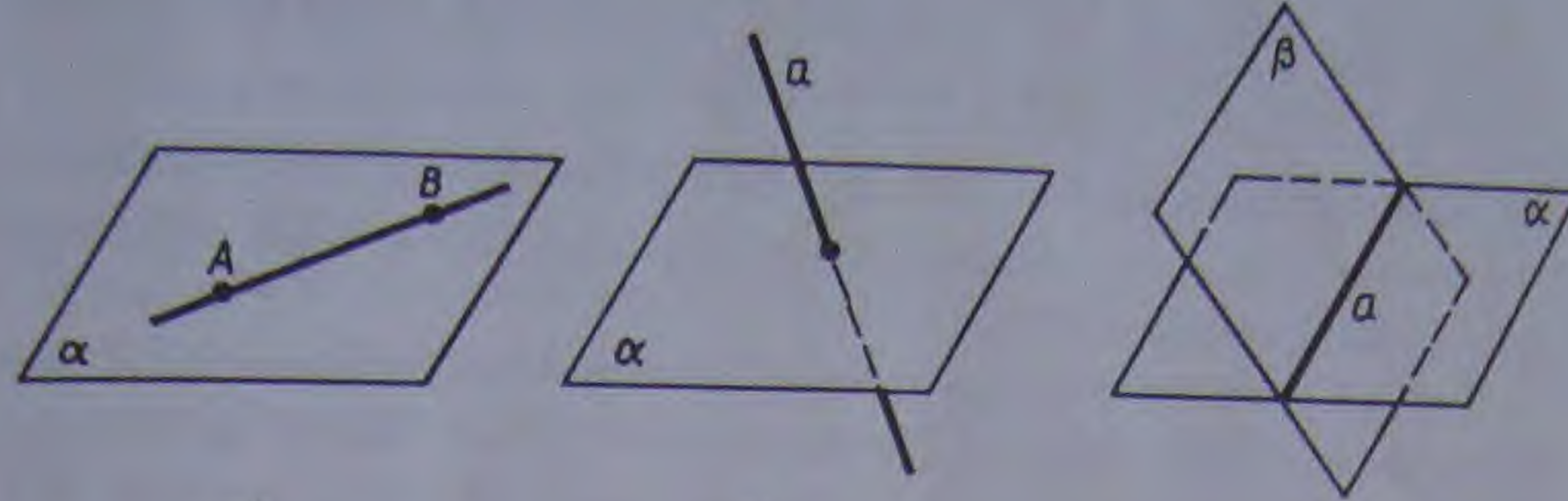
Ա-2 աքսիոմով արտահայտված հատկությունը օգտագործվում է գծագրական քանոնի «ուղղագիծ լինելը» ստուգելու համար: Այդ նպատակով քանոնի եզրը հպում են սեղանի հարթ մակերևույթին: Եթե քանոնի եզրը ուղղագիծ է, ապա այն բոլոր կետերով կիպ հպվում է սեղանի մակերևույթին: Իսկ եթե եզրը ուղղագիծ չէ, ապա նրա և սեղանի մակերևույթի միջև տեղ-տեղ մնում են բաց արանքներ:

Ա-2 աքսիոմից հետևում է, որ եթե ուղիղն ընկած չէ տրված հարթության մեջ, ապա այն չի կարող դրա հետ ունենալ մեկից ավելի ընդհանուր կետեր: Եթե ուղիղն ու հարթությունն ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ, ապա ասում են, որ նրանք **հատվում են** (նկ.5,բ):

Ա-3. ***Եթե երկու հարթություններն ունեն ընդհանուր կետ, ապա նրանք ունեն ընդհանուր ուղիղ, որի վրա ընկած են այդ հարթությունների բոլոր ընդհանուր կետերը:***

Այս դեպքում ասում են, որ **հարթությունները հատվում են ուղղով** (նկ.5,գ): Ա-3 աքսիոմի ակնառու լուսաբանման օրինակ է սենյակի երկու կից պատերի, կամ առաստաղի ու պատի հատումը:

Նախքան բերված աքսիոմների անմիջական հետևանքներին անցնելը, նշենք մի կարևոր հանգամանք, որից հետագայում օգտվելու ենք: Տա-



ա)
AB ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ

բ)
a ուղիղը և α հարթությունը հատվում են

գ)
α և β հարթությունները հատվում են *a* ուղղով

Նկ. 5

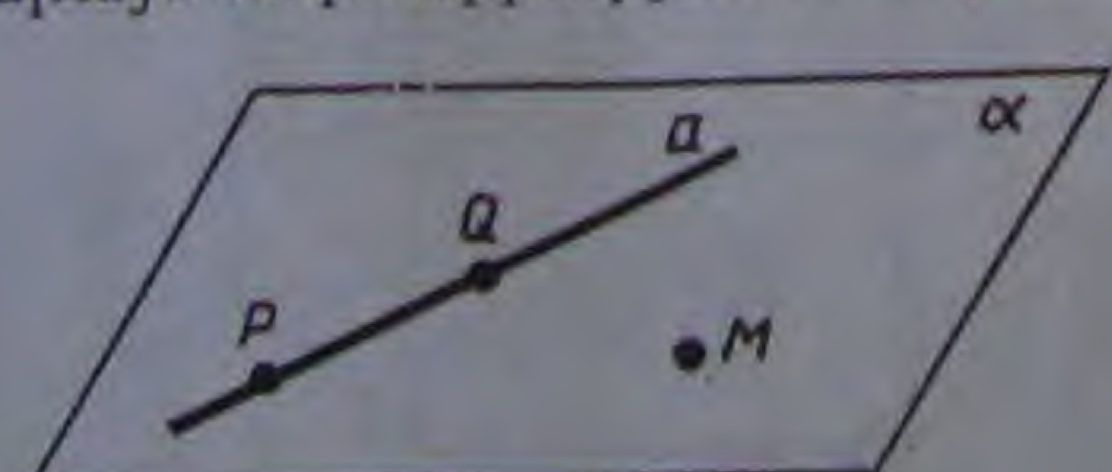
բածության մեջ հարթություններն անվերջ շատ են, և դրանցից յուրաքանչյուրի համար ստույգ են հարթաչափության բոլոր աքսիոմներն ու թեորեմները: Ավելին, հարթաչափության դասընթացից հայտնի՝ եռանկյունների հավասարության և նմանության հայտանիշները ստույգ են նաև այն դեպքում, երբ եռանկյունները դասավորված են տարբեր հարթությունների վրա:

3 Որոշ հետևանքներ աքսիոմներից

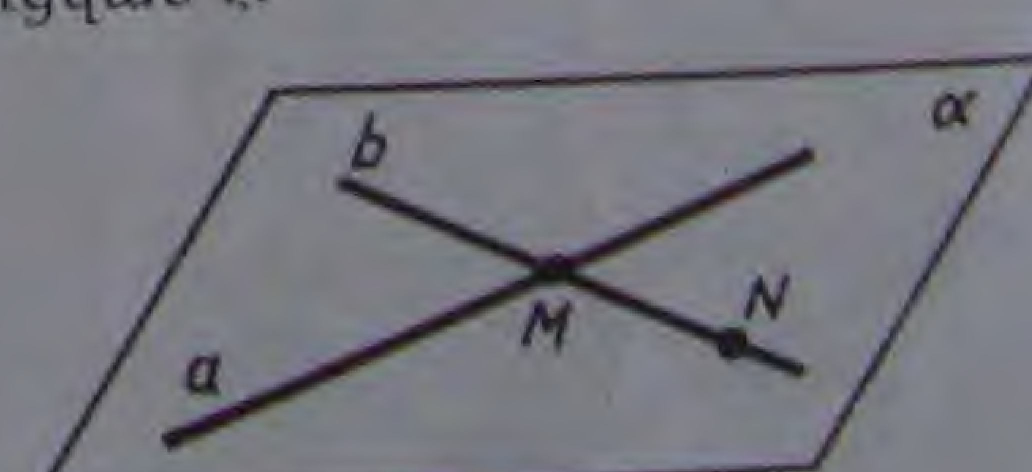
Թ ե ո ր ե մ : ***Ուղղով և նրա վրա չընկած կետով անցնում է հարթություն, ընդ որում՝ միայն մեկը:***

Ա պ ա ց ու ց ու մ : Դիտարկենք *a* ուղիղը և նրա վրա չընկած *M* կետը (նկ.6): Նախ ապացուցենք, որ *a* ուղղով և *M* կետով անցնում է հարթություն: *a* ուղղի վրա նշենք երկու կետ՝ *P*-ն և *Q*-ն: *M*, *P* և *Q* կետերը մի ուղղի վրա չեն ընկած, ուրեմն՝ ըստ Ա-1 աքսիոմի, այդ կետերով անցնում է որևէ α հարթություն: Քանի որ *a* ուղղի երկու կետերը (*P*-ն և *Q*-ն) ընկած են α հարթության մեջ, ապա ըստ Ա-2 աքսիոմի՝ α հարթության մեջ են ընկած նաև *a* ուղղի բոլոր կետերը: Այսպիսով՝ α հարթությունն անցնում է *a* ուղղով և *M* կետով:

a ուղղով և *M* կետով անցնող հարթության միակությունը հետևում է այն բանից, որ *a* ուղղով և *M* կետով անցնող ցանկացած հարթություն անցնում է *M*, *P* և *Q* կետերով: Հետևաբար այդ հարթությունը համընկնում է α հարթությանը. չէ՞ որ ըստ Ա-1 աքսիոմի՝ *M*, *P* և *Q* կետերով անցնում է միայն մեկ հարթություն: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 6



Նկ. 7

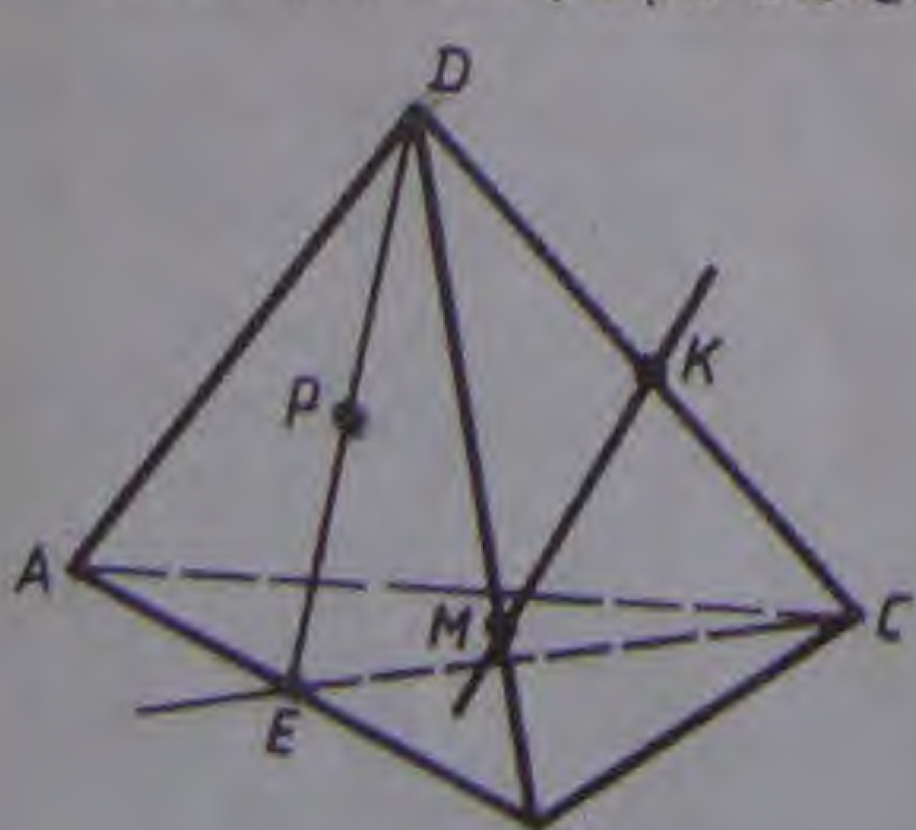
Թ ե ո ր ե մ : ***Երկու հատվող ուղիղներով անցնում է հարթություն, ընդ որում՝ միայն մեկը:***

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ : Դիտարկենք a և b ուղիղներ, որոնք հատվում են M կետում (նկ. 7): Ապացուցենք, որ այդ ուղիղներով անցնում է հարթություն, ընդ որում միայն մեկը:

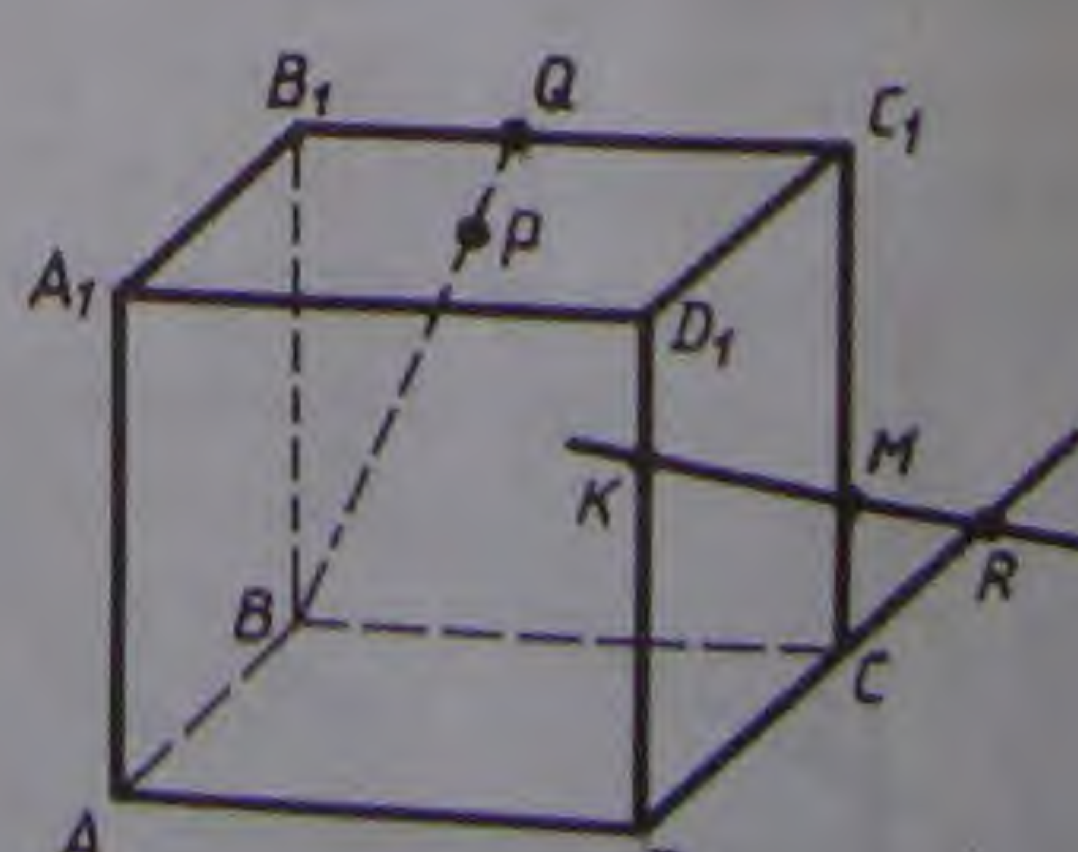
b ուղղի վրա նշենք M կետից տարբեր որևէ N կետ: Դիտարկենք այն α հարթությունը, որն անցնում է a ուղղով և N կետով: Քանի որ b ուղղի երկու կետերը (M-ը և N-ը) ընկած են α հարթության մեջ, ապա ըստ Ա-2 աքսիոմի՝ α հարթությունն անցնում է b ուղղով: Այսպիսով՝ α հարթությունն անցնում է a և b ուղիղներով: Այդ հարթության միակությունը հետևում է այն բանից, որ a և b ուղիղներով անցնող ցանկացած հարթություն անցնում է N կետով: Հետևաբար՝ այն համընկնում է α հարթությանը. չէ՞ որ N կետով և a ուղղով անցնում է միայն մեկ հարթություն (ըստ նախորդ թեորեմի): Թեորեմն ապացուցված է:

Հարցեր և խնդիրներ

1. Ըստ նկար 8-ի անվանեք. **ա)** այն հարթությունները, որոնց մեջ են ընկած PE, MK, DB, AB, EC ուղիղները, **բ)** DK ուղղի և ABC հարթության հատման կետը, CE ուղղի և ADB հարթության հատման կետը, **գ)** ADB և DBC հարթությունների վրա ընկած կետերը, **դ)** այն ուղիղները, որոնցով հատվում են հետևյալ հարթությունները՝ ABC-ն և DCB-ն, ABD-ն և CDA-ն, PDC-ն և ABC-ն:
2. Ըստ նկար 9-ի անվանեք. **ա)** DCC_1 և BQC հարթությունների մեջ ընկած կետերը, **բ)** այն հարթությունները, որոնց մեջ է ընկած AA_1 ուղիղը, **գ)** MK ուղղի և ABD հարթության հատման կետը, և այն կետերը, որոնցում DK և BP ուղիղները հատում են $A_1B_1C_1$ հարթությունը, **դ)** այն ուղիղները, որոնցով հատվում են հետևյալ հարթությունները՝ AA_1B_1-ը ACD-ն, PB_1C_1-ը և ABC-ն, հետևյալ ուղիղների հատման կետերը՝ MK և DC, B_1C_1 և BP, C_1M և DC:



Նկ. 8



Նկ. 9

3. Արդյոք ճշմարի՞տ է. **ա)** ցանկացած երեք կետեր գտնվում են մի հարթության մեջ, **բ)** ցանկացած չորս կետեր գտնվում են մի հարթության մեջ, **գ)** ցանկացած չորս կետեր մի հարթության մեջ չեն գտնվում, **դ)** ցանկացած երեք կետերով անցնում է հարթություն, ընդ որում միայն մեկը:

4. A, B, C և D կետերն ընկած չեն մի հարթության մեջ: **ա)** Կարո՞ղ են, արդյոք, այդ կետերից որևէ երեքն ընկած լինել մի ուղղի վրա: **բ)** AB և CD ուղիղները կարո՞ղ են, արդյոք, հատվել: Պատասխանը հիմնավորեք:

5. Ապացուցեք, որ մի ուղղի վրա ընկած տրված երեք կետերով անցնում է հարթություն: Քանի՞ այդպիսի հարթություն գոյություն ունի:

6. Տրված երեք կետերը զույգ առ զույգ միացված են հատվածներով: Ապացուցեք, որ այդ բոլոր հատվածները մի հարթության մեջ են:

7. Երկու ուղիղներ հատվում են M կետում: Ապացուցեք, որ այդ ուղիղները հատող, բայց M կետով չանցնող բոլոր ուղիղները մի հարթության մեջ են: Արդյոք մի՞ հարթության մեջ են M կետով անցնող բոլոր ուղիղները:

8. Արդյոք ճշմարի՞տ է պնդումը. **ա)** եթե շրջանագծի երկու կետերն ընկած են հարթության մեջ, ապա ամբողջ շրջանագիծն ընկած է այդ հարթության մեջ, **բ)** եթե շրջանագծի երեք կետեր ընկած են մի հարթության մեջ, ապա ամբողջ շրջանագիծն ընկած է այդ հարթության մեջ:

9. Զուգահեռագծի երկու կից գագաթներն ու անկյունագծերի հատման կետն ընկած են α հարթության մեջ: Արդյո՞ք α հարթության մեջ են ընկած զուգահեռագծի մյուս երկու գագաթները: Պատասխանը հիմնավորեք:

10. Արդյոք ճշմարի՞տ է, որ ուղիղն ընկած է տրված եռանկյան հարթության մեջ, եթե. **ա)** այն հատում է եռանկյան երկու կողմերը, **բ)** այն անցնում է եռանկյան գագաթներից մեկով:

11. Տրված են ուղիղ և մի կետ, որն ընկած չէ այդ ուղղի վրա: Ապացուցեք, որ բոլոր այն ուղիղները, որոնք անցնում են տրված կետով և հատում են տրված ուղիղը, գտնվում են մի հարթության մեջ:

12. A, B, C, D կետերն ընկած չեն մի հարթության մեջ: Արդյոք հատվու՞մ են A, B, C կետերով և A, B, D կետերով անցնող հարթությունները:

13. Արդյոք կարո՞ղ են երկու հարթությունները ունենալ. **ա)** միայն մեկ ընդհանուր կետ, **բ)** միայն երկու ընդհանուր կետեր, **գ)** միայն մեկ ընդհանուր ուղիղ:

14. Մի կետով անցնում են երեք ուղիղներ: Դրանցից յուրաքանչյուր երկուսով տարված է հարթություն: Ընդամենը քանի՞ հարթություն է տարված:

15. Երեք ուղիղներ զույգ առ զույգ հատվում են: Ապացուցեք, որ դրանք կա՛մ մի հարթության մեջ են, կա՛մ ունեն ընդհանուր կետ:

ԳԼՈՒԽ I

ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՀԵՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 1 Ուղիղների, ուղղի ու հարթության զուգահեռությունը

4 Զուգահեռ ուղիղները տարածության մեջ

Ներմուծենք տարածության մեջ զուգահեռ ուղիղների հասկացությունը:

Սահմանում: ***Տարածության մեջ երկու ուղիղներ կոչվում են զուգահեռ, եթե նրանք ընկած են մի հարթության մեջ և չեն հատվում:***

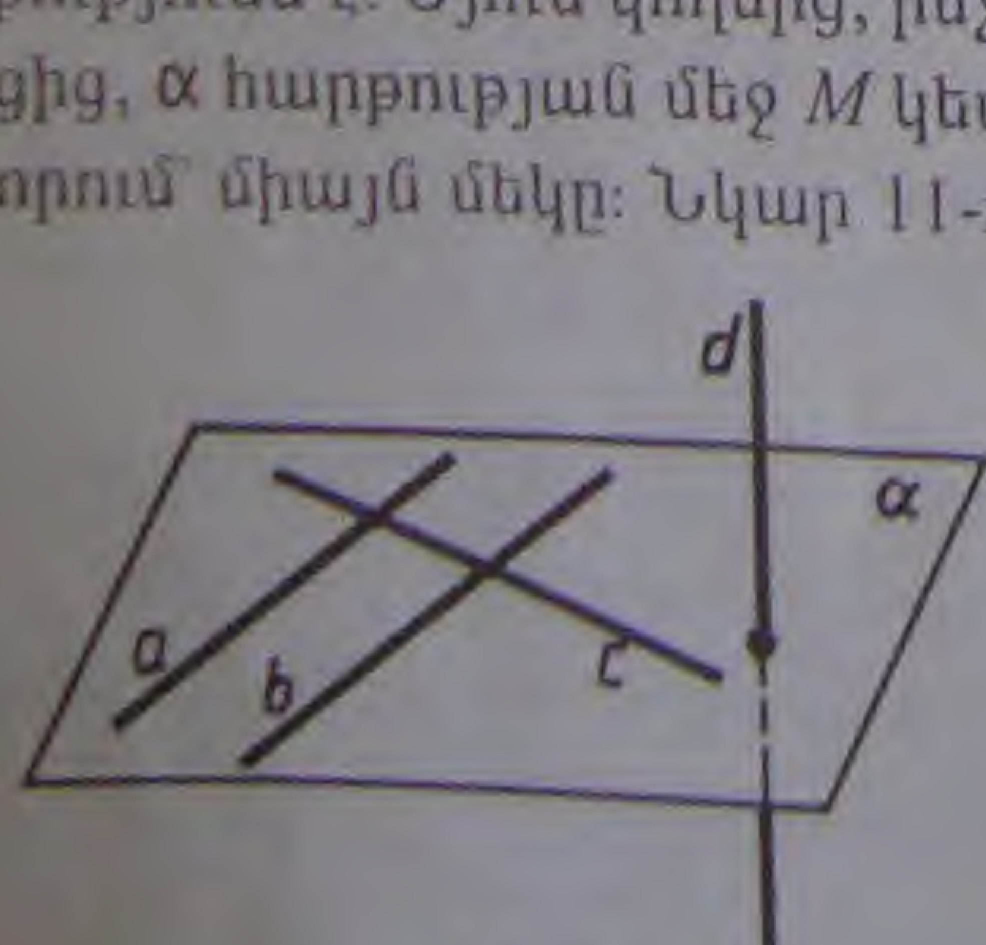
a և b ուղիղների զուգահեռությունը նշանակվում է այսպես՝ $a \parallel b$:

Նկար 10-ում a և b ուղիղները զուգահեռ են, իսկ a և c, a և d ուղիղները զուգահեռ չեն:

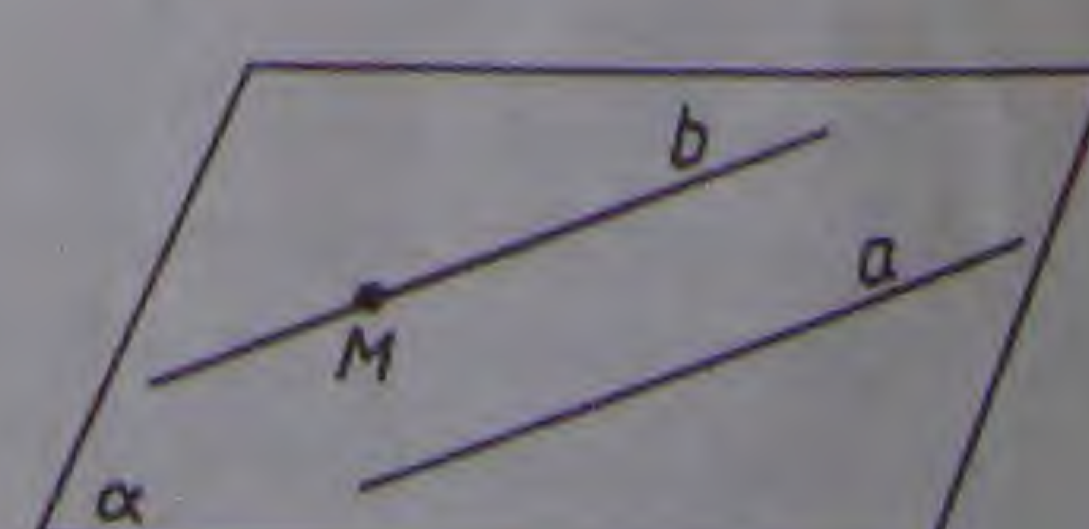
Ապացուցենք թեորեմ զուգահեռ ուղիղների մասին:

Թեորեմ: ***Տարածության ցանկացած կետով, որն ընկած չէ տրված ուղղի վրա, անցնում է այդ ուղղին զուգահեռ ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը:***

Ապացուցում: Դիտարկենք a ուղիղը և M կետը, որն ընկած չէ այդ ուղղի վրա (նկ. 11): a ուղղով և M կետով անցնում է հարթություն, ընդ որում՝ միայն մեկը (կետ 3): Այդ հարթությունը նշանակենք α տառով: M կետով անցնող և a ուղղին զուգահեռ ուղիղը պետք է լինի այն նույն հարթության մեջ, որում ընկած են M կետը և a ուղիղը: Իսկ դա հենց α հարթությունն է: Մյուս կողմից, ինչպես հայտնի է հարթաչափության դասընթացից, α հարթության մեջ M կետով անցնում է a ուղղին զուգահեռ ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը: Նկար 11-ում այդ ուղիղը նշանակված է b տառով: Այս-



Նկ. 10



Նկ. 11

պիսով՝ b-ն միակ ուղիղն է, որն անցնում է M կետով և զուգահեռ է a ուղղին: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետագայում մեզ հարկավոր կլինեն զուգահեռ հատվածների, զուգահեռ հատվածի և ուղղի, զուգահեռ ճառագայթների հասկացությունները: Երկու հատվածներ կոչվում են **զուգահեռ**, եթե նրանք ընկած են զուգահեռ ուղիղների վրա: Համանման ձևով են սահմանվում նաև հատվածի և ուղղի, ինչպես նաև երկու ճառագայթների զուգահեռությունը: Նկար 12-ում CD և EF հատվածները զուգահեռ են ($CD \parallel EF$), իսկ AB և CD հատվածները զուգահեռ չեն, AB հատվածը զուգահեռ է a ուղղին ($AB \parallel a$):

5 Երեք ուղիղների զուգահեռությունը

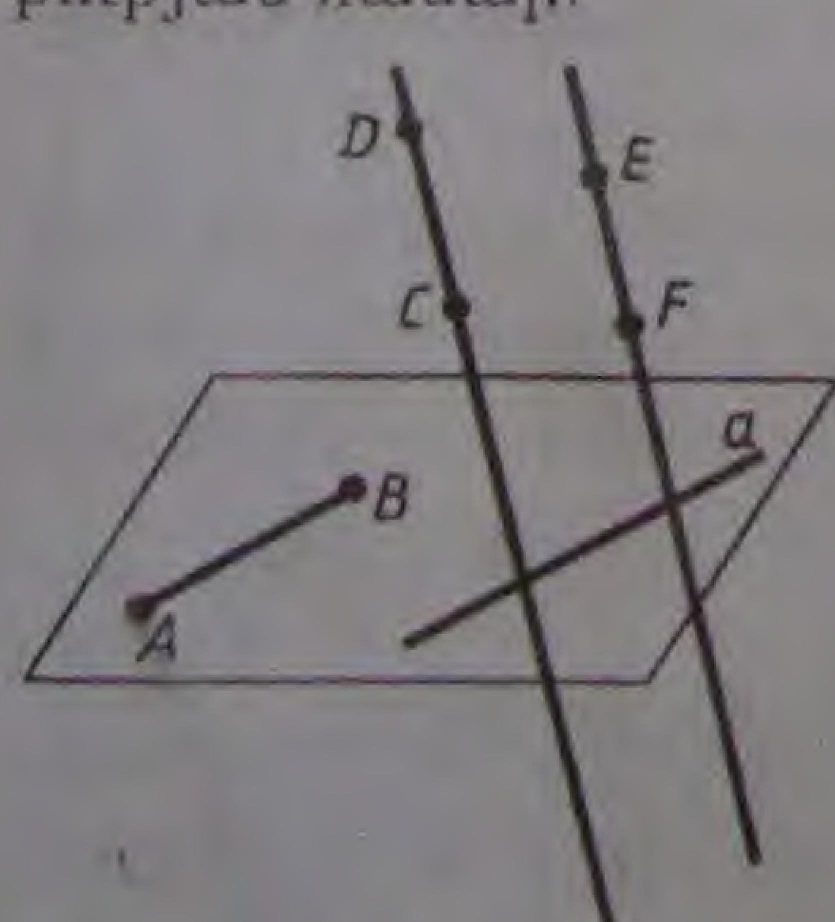
Ապացուցենք լեմմ՝ հարթությունը զուգահեռ ուղիղներով հատելու մասին. այն անհրաժեշտ է հետագա շարադրանքի համար:

Լ ե մ մ ։ ***Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը հատում է տրված հարթությունը, ապա մյուս ուղիղը ևս հատում է այդ հարթությունը:***

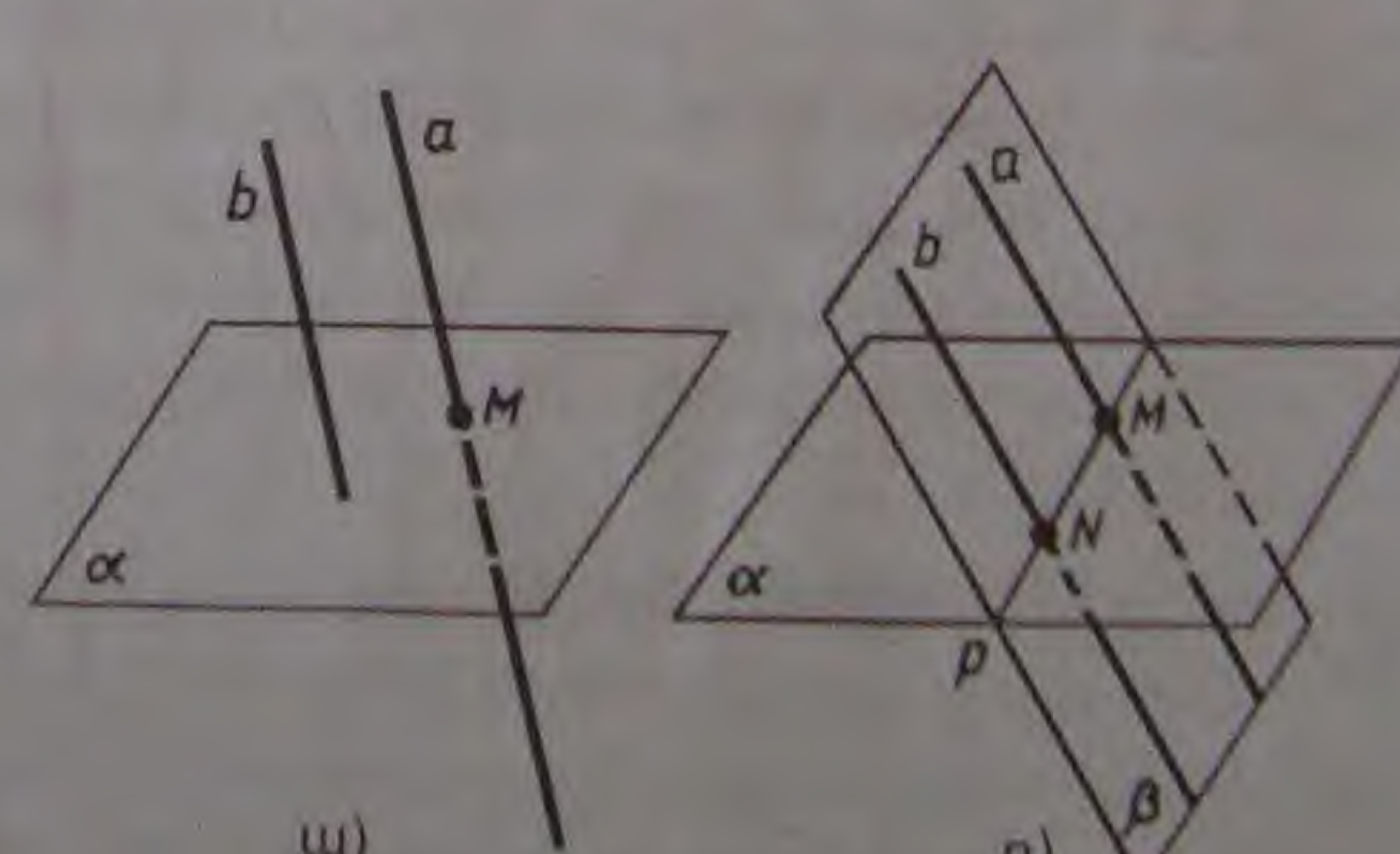
Ա պ ա ց ո ւ յ ց ։ Դիտարկենք a և b զուգահեռ ուղիղները, որոնցից մեկը, ասենք՝ a-ն հատում է α հարթությունը (նկ.13,ա):

Ապացուցենք, որ b ուղիղը նույնպես հատում է α հարթությունը, այսինքն՝ նրա հետ ունի միայն մեկ ընդհանուր կետ:

Նշանակենք β տառով այն հարթությունը, որի մեջ են ընկած a և b զուգահեռ ուղիղները: α և β հարթություններն ունեն ընդհանուր կետ՝ M-ը: Ուրեմն, ըստ Ա-3 աքսիոմի, այդ հարթությունները հատվում են որևէ p ուղղով (նկ.13,բ): Այդ p ուղիղն ընկած է β հարթության մեջ և հատում է a ուղիղը (M կետում): Ուրեմն՝ այն հատում է նաև a-ին զուգահեռ b ուղիղը մի որևէ N կետում: p ուղիղն ընկած է նաև α հարթության մեջ և, ուրեմն, N-ը α հարթության կետ է: Այսպիսով՝ N-ը ընդհանուր կետ է b ուղղի և α հարթության համար:



Նկ. 12



ա) բ)
Նկ. 13

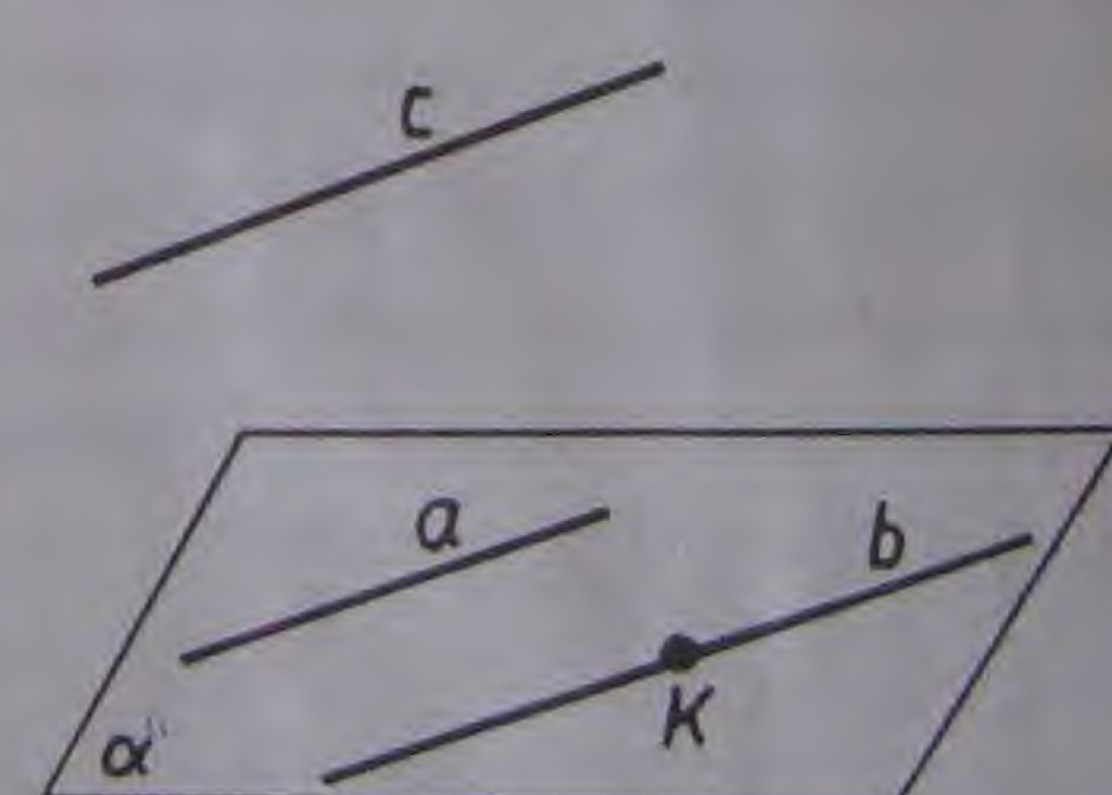
Այժմ ապացուցենք, որ b ուղիղը և α հարթությունը չունեն այլ ընդհանուր կետեր, բացի N-ից: Դրանից էլ հենց կհետևի, որ b ուղիղը հատում է α հարթությունը: Իսկապես, եթե ընդունենք, թե b ուղիղը α հարթության հետ ունի ևս մեկ ընդհանուր կետ, ապա կհետևեր, որ այն ամբողջությամբ ընկած է α հարթության մեջ: Այդ դեպքում b-ն ընդհանուր ուղիղ կլիներ α և β հարթությունների համար: Դա արդեն կնշանակեր, որ b-ն համընկնում է p ուղղին, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ ըստ պայմանի a և b ուղիղները զուգահեռ են, մինչդեռ a և p ուղիղները հատվում են: Լեմմը ապացուցված է:

Հարթաչափության դասընթացից հայտնի է, որ եթե հարթության երեք ուղիղներից երկուսը զուգահեռ են երրորդին, ապա այդ երկու ուղիղները զուգահեռ են: Պարզվում է, որ համանման պնդումը ճշմարիտ է նաև երեք ուղիղների համար տարածության մեջ: Ձևակերպենք և ապացուցենք այդ պնդումը:

Թեորեմ: ***Եթե երկու ուղիղներ զուգահեռ են երրորդ ուղղին, ապա դրանք զուգահեռ են:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ $a \parallel c$ և $b \parallel c$: Ապացուցենք, որ $a \parallel b$: Դրա համար պետք է ապացուցել, որ a և b ուղիղները՝ **1)** ընկած են մի հարթության մեջ և **2)** չեն հատվում:

1) b ուղղի վրա նշենք մի որևէ K կետ և α տառով նշանակենք այն հարթությունը, որն անցնում է a ուղղով և K կետով (նկ.14): Ապացուցենք, որ b ուղիղն ընկած է այդ հարթության մեջ: Իսկապես, եթե ենթադրենք, թե b ուղիղը հատում է α հարթությունը, ապա կհետևի, որ c ուղիղը ևս հատում է α հարթությունը (ըստ հարթությունը զուգահեռ ուղիղներով հատելու մասին լեմմի): Սակայն, քանի որ a և c ուղիղները զուգահեռ են, ապա a ուղիղը նույնպես հատում է α հարթությունը: Իսկ դա հնարավոր չէ, քանի որ a ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ:



Նկ. 14

2) a և b ուղիղները չեն հատվում, քանի որ հակառակ դեպքում՝ եթե հատվեին, կստացվեր, որ նրանց հատման կետով անցնում են c ուղղին զուգահեռ երկու ուղիղներ (a-ն և b-ն), ինչը հնարավոր չէ: Թեորեմն ապացուցված է:

6 Ուղղի և հարթության զուգահեռությունը

Եթե ուղղի երկու կետերն ընկած են տրված հարթության մեջ, ապա Ա-2 աքսիոմի համաձայն՝ այդ հարթության մեջ է ընկած ամբողջ ուղիղը: Դրանից հետևում է, որ **տարածության մեջ ուղղի և հարթության փոխադարձ դասավորության համար հնարավոր են երեք դեպք.**

ա) ուղիղն ընկած է հարթության մեջ (տե՛ս նկ.5,ա),
բ) ուղիղը և հարթությունը ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ, այսինքն՝ հատվում են (տե՛ս նկ.5,բ),
գ) ուղիղը և հարթությունը չունեն ոչ մի ընդհանուր կետ:

Սահմանում: ***Ուղիղը և հարթությունը կոչվում են զուգահեռ, եթե նրանք ընդհանուր կետեր չունեն:***

a ուղղի և α հարթության զուգահեռությունը նշանակվում է այսպես՝ $a \parallel \alpha$: Հարթությանը զուգահեռ ուղղի մասին ակնառու պատկերացում են տալիս տրոլեյբուսի կամ տրամվայի ձգված էլեկտրալարերը. դրանք զուգահեռ են գետնի հարթությանը: Մեկ այլ օրինակ է սենյակի պատի և առաստաղի հատման գիծը. այն զուգահեռ է հատակի հարթությանը (նկ.15,ա): Նկատենք, որ հատակի հարթության մեջ կա այնպիսի ուղիղ, որը զուգահեռ է այդ գծին: Այդպիսի ուղիղ է, օրինակ, հատակի և այդ նույն պատի հատման գիծը:

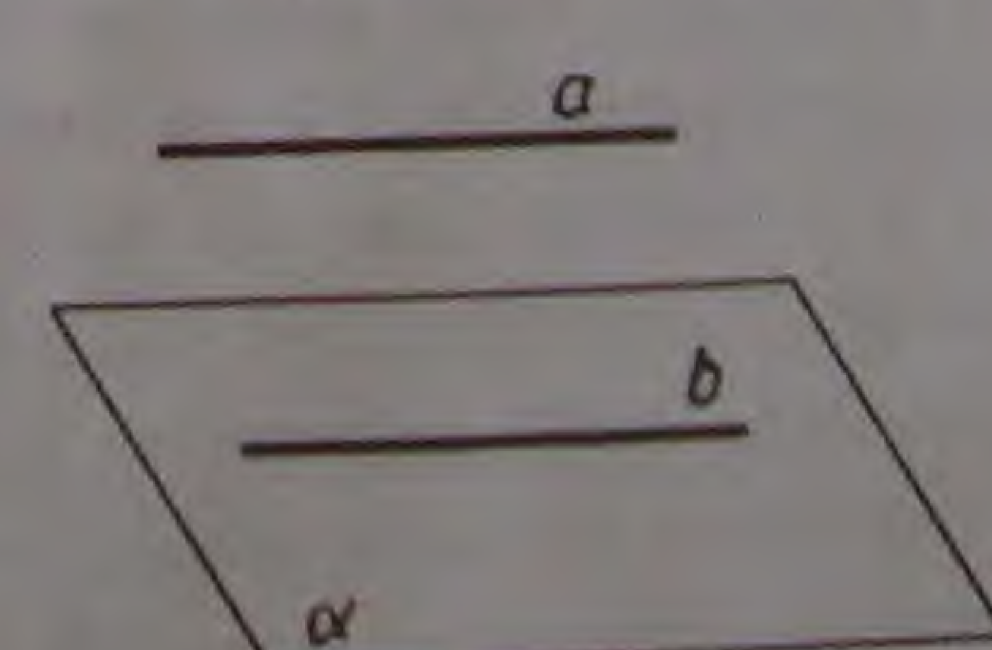
Նկարագրված ուղիղները 15,ա նկարում նշանակված են a և b տառերով: Պարզվում է, որ եթե α հարթության մեջ կա այնպիսի b ուղիղ, որը զուգահեռ է α հարթության մեջ չընկած a ուղղին, ապա a ուղիղը և α հարթությունը զուգահեռ են (նկ.15,բ): Այլ խոսքով՝ a ուղղի և α հարթության զուգահեռության մասին կարելի է եզրակացնել, եթե հայտնի է, որ α հարթության մեջ կա մի b ուղիղ, որը զուգահեռ է a ուղղին: **Հայտանիշ** արտահայտող այս պնդումը ձևակերպենք և ապացուցենք որպես թեորեմ:

Թեորեմ: ***Եթե տրված հարթության մեջ չընկած ուղիղը զուգահեռ է այդ հարթության մեջ ընկած որևէ ուղղի, ապա այն զուգահեռ է տրված հարթությանը:***

Ապացուցում: Դիտարկենք α հարթությունը և երկու զուգահեռ ուղիղներ՝ a-ն և b-ն, որոնք դասավորված են այնպես, որ b ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ a ուղիղը՝ ոչ (նկ.15,բ): Ապացուցենք, որ $a \parallel \alpha$:

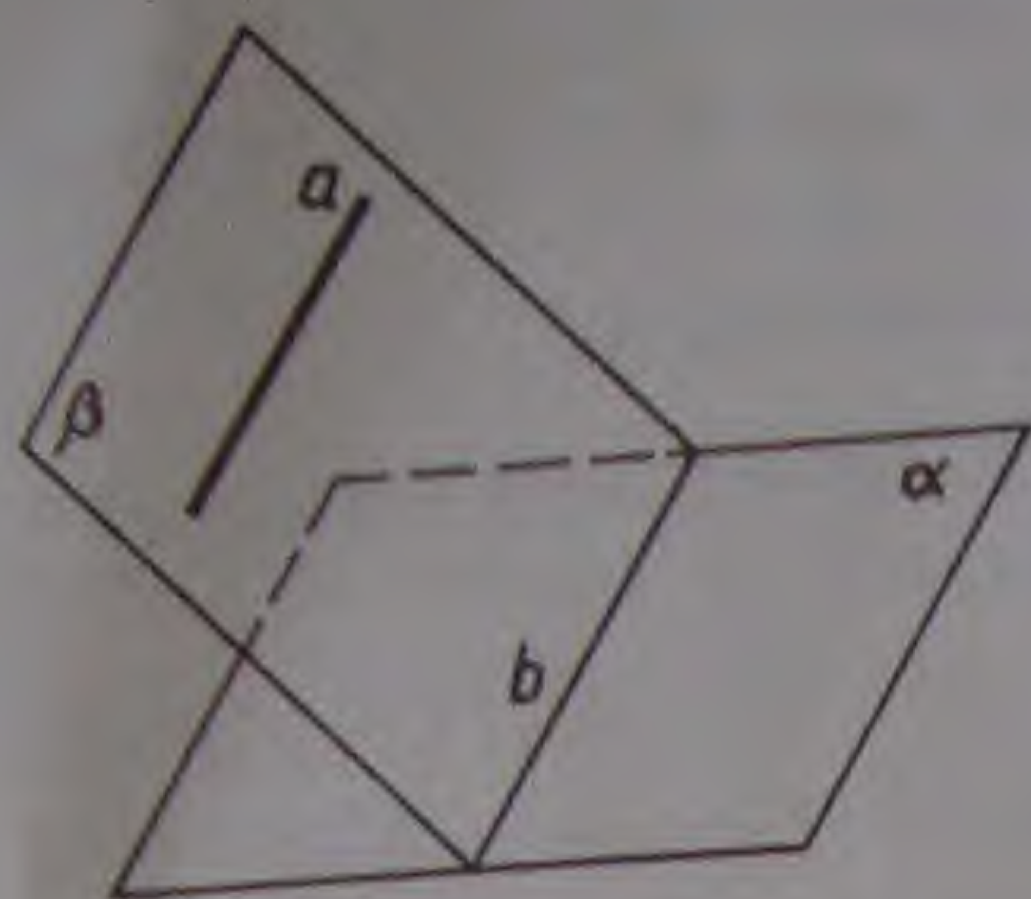
Ենթադրենք, թե տեղի ունի հակառակը: Այդ դեպքում a ուղիղը հա-

ա)

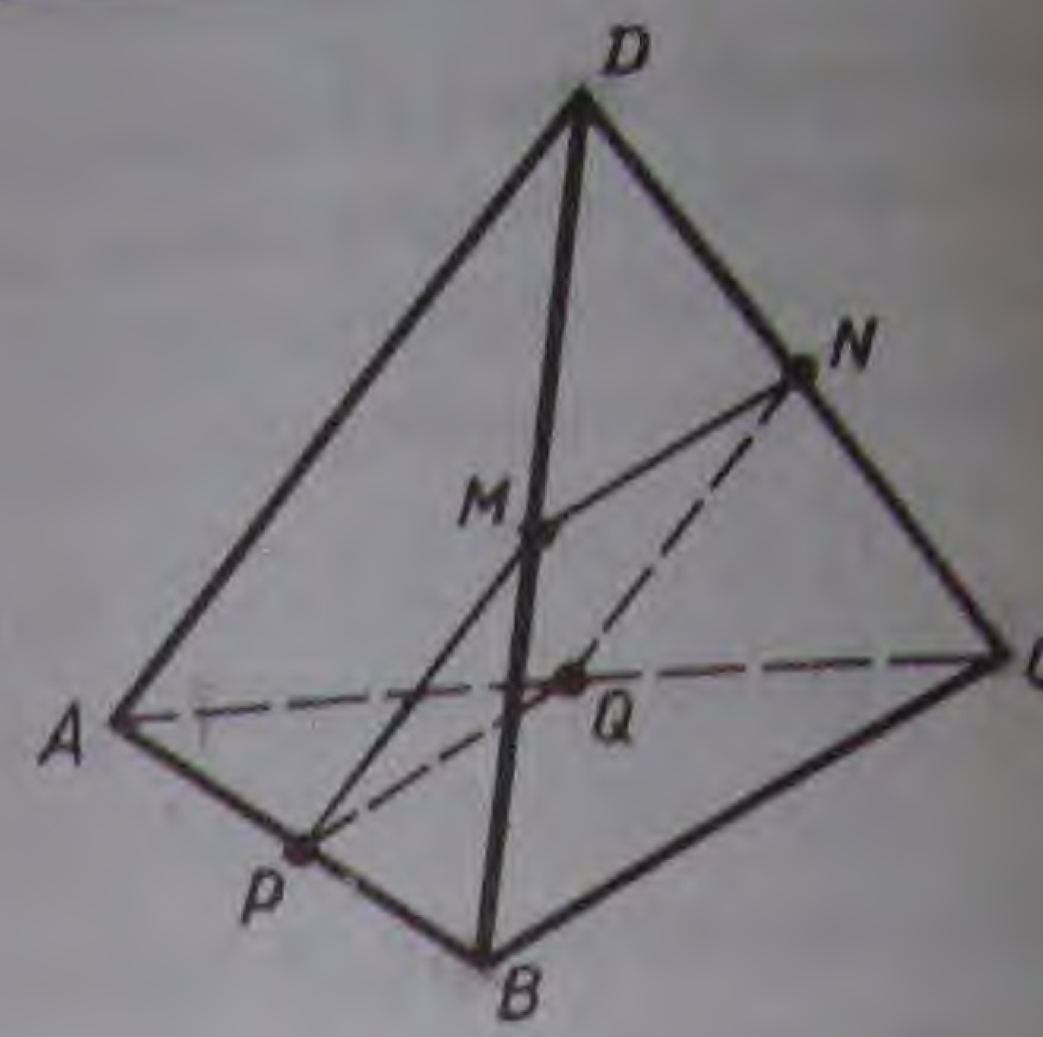


բ)

Նկ. 15



Նկ. 16



Նկ. 17

տում է α հարթությունը, և, ուրեմն, b ուղիղը նս հատում է α հարթությունը (ըստ հարթությունը զուգահեռ ուղիղներով հատելու մասին լեմմի): Սակայն դա հնարավոր չէ, քանի որ b ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ:

Այսպիսով՝ a ուղիղը չի հատում α հարթությունը. և ուրեմն, այն զուգահեռ է այդ հարթությանը: Թեորեմն ապացուցված է:

Ապացուցենք նս երկու պնդում, որոնք հաճախ կիրառվում են հատկապես խնդիրներ լուծելիս:

1^0. ***Եթե հարթությունն անցնում է փրված ուղղով և հատում է մի ուրիշ հարթություն, որին զուգահեռ է այդ ուղիղը, ապա հարթությունների հատման գիծը զուգահեռ է փրված ուղղին:***

Դիցուք՝ α հարթությանը զուգահեռ a ուղղով անցնում է β հարթությունը, որը α հարթությունը հատում է b ուղղով (նկ.16): Ապացուցենք, որ $b \parallel a$:

Իսկապես, այդ երկու՝ a և b ուղիղներն ընկած են միևնույն β հարթության մեջ և չեն հատվում. քանն այն է, որ հակառակ դեպքում կստացվի, որ a ուղիղը հատում է α հարթությունը: Իսկ դա հնարավոր չէ, քանի որ ըստ պայմանի $a \parallel \alpha$:

2^0. ***Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը զուգահեռ է փրված հարթությանը, ապա մյուս ուղիղը կա՛մ նույնպես զուգահեռ է այդ հարթությանը, կա՛մ էլ ընկած է դրա մեջ:***

Իսկապես, դիցուք զուգահեռ ուղիղներն են a-ն և b-ն, ընդ որում՝ a ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը: Դա նշանակում է, որ a ուղիղը չի հատում α հարթությունը: Ուրեմն, համաձայն հարթությունը զուգահեռ ուղիղներով հատելու մասին լեմմի, a-ին զուգահեռ b ուղիղը նս չի հատում a հարթությունը: Հետևաբար՝ b ուղիղը կա՛մ զուգահեռ է α հարթությանը, կամ էլ ընկած է այդ հարթության մեջ:

Հարցեր և խնդիրներ

16. a և b զուգահեռ ուղիղներն ընկած են α հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ a և b ուղիղները հատող c ուղիղը ևս ընկած է α հարթության մեջ:

17. Նկար 17-ում M, N, Q և P կետերը DB, DC, AC և AB հատվածների միջնակետերն են: Գտեք $MNQP$ քառանկյան պարագիծը, եթե AD=12սմ, BC=14սմ:

18. C կետն ընկած է AB հատվածի վրա: A կետով տարված է հարթություն, իսկ B և C կետերով տարված են զուգահեռ ուղիղներ, որոնք այդ հարթությունը հատում են համապատասխանաբար B_1 և C_1 կետերում: Գտեք CC_1 հատվածի երկարությունը, եթե. **ա)** C կետը AB հատվածի միջնակետն է, և BB_1=7սմ, **բ)** $AC:CB$=3:2, և BB_1=20սմ:

19. $ABCD$ զուգահեռագծի AB և BC կողմերը հատում են α հարթությունը: Ապացուցեք, որ AD և DC ուղիղները նույնպես հատում են α հարթությունը:

20. Սեղանի միջին գիծն ընկած է α հարթության մեջ: α հարթությունը հատու՞մ են, արդյոք, սեղանի հիմքերն ընդգրկող ուղիղները: Պատասխանը հիմնավորեք:

21. ABC և ABD եռանկյուններն ընկած չեն մի հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ CD հատվածին զուգահեռ ցանկացած ուղիղ հատում է այդ եռանկյունների հարթությունները:

22. A և B կետերն ընկած են α հարթության մեջ, իսկ C կետն ընկած չէ այդ հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ AC և BC հատվածների միջնակետերով անցնող ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը:

23. M կետն ընկած չէ $ABCD$ ուղղանկյան հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ CD ուղիղը զուգահեռ է ABM հարթությանը:

24. M կետն ընկած չէ AD հիմքով $ABCD$ սեղանի հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ AD ուղիղը զուգահեռ է BMC հարթությանը:

25. Տրված ուղիղը զուգահեռ է մի ուղղի, որով հատվում են երկու հարթություններ: Ապացուցեք, որ եթե տրված ուղիղն ընկած չէ այդ հարթությունների մեջ, ապա զուգահեռ է այդ հարթություններին:

26. ABC եռանկյան AC կողմը զուգահեռ է α հարթությանը*, իսկ AB և BC կողմերը հատում են այդ հարթությունը M և N կետերում: Ապացուցեք, որ ABC և MBN եռանկյունները նման են:

27. C կետն ընկած է AB հատվածի վրա, ընդ որում $AB:BC$=4:3: CD հատվածը, որի երկարությունը 12սմ է, զուգահեռ է α հարթությանը, որն

* Ասում են, որ հատվածը զուգահեռ է հարթությանը, եթե հարթությանը զուգահեռ է այդ հատվածն ընդգրկող ուղիղը:

E կետում
անցնում է B կետով: Ապացուցեք, որ AD ուղիղը ինչ-որ E կետում
հատում է α հարթությունը, և գտեք BE հատվածը:
D և
համապատասխանաբար,
28. ABC եռանկյան AB և AC կողմերի վրա, $\frac{BD}{DA}=\frac{2}{3}$: α հարթությունն
E կետերը նշված են այնպես, որ DE=5սմ, և
անցնում է B և C կետերով և զուգահեռ է DE հատվածին: Գտեք BC
հատվածի երկարությունը:
29. ABCD սեղանի BC հիմքը 12սմ է: M կետն ընկած չէ սեղանի հարթության մեջ, իսկ K կետը BM հատվածի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ ADK հարթությունը ինչ-որ մի H կետում հատում է MC հատվածը, և գտեք KH հատվածը:

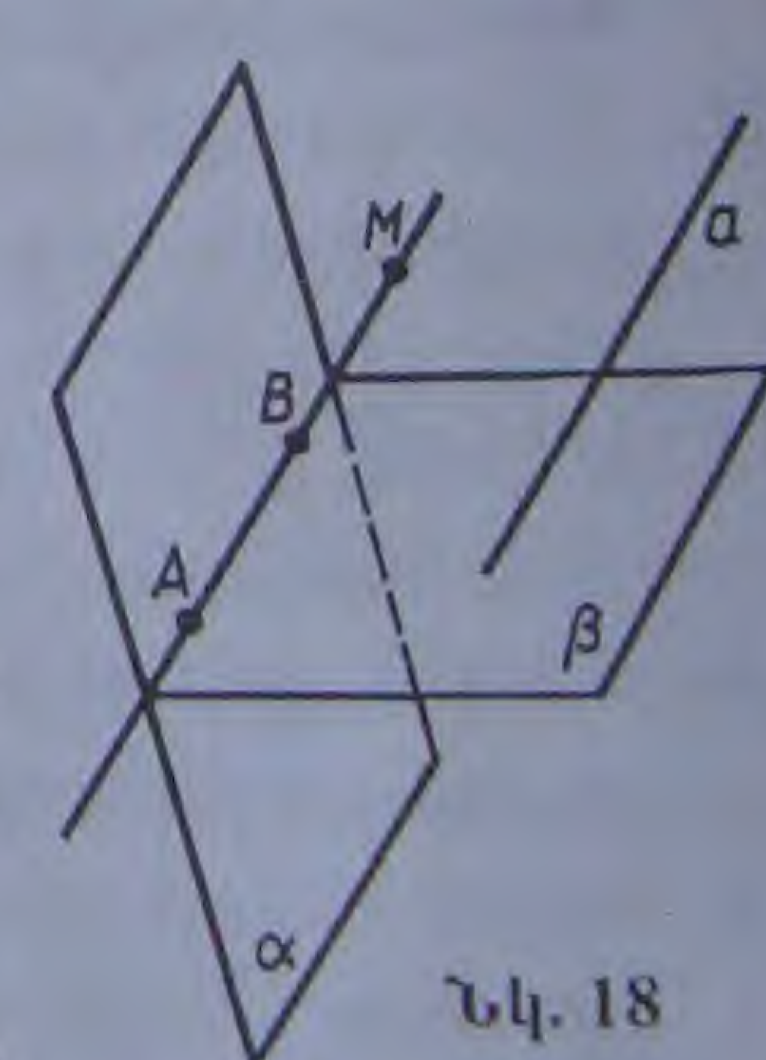
30. ABCD սեղանի AB հիմքը զուգահեռ է α հարթությանը, իսկ C գագաթն ընկած է այդ հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ. **ա)** սեղանի CD հիմքն ընկած է α հարթության մեջ, **բ)** սեղանի միջին գիծը զուգահեռ է α հարթությանը:

31. α հարթությունը զուգահեռ է ABC եռանկյան BC կողմին և անցնում է AB կողմի միջնակետով: Ապացուցենք, որ α հարթությունն անցնում է նաև AC կողմի միջնակետով:

32. α և β հարթությունները հատվում են AB ուղղով: a ուղիղը զուգահեռ է ինչպես α, այնպես էլ β հարթությանը: Ապացուցեք, որ a և AB ուղիղները զուգահեռ են:

Լուծում: A կետով տանենք* a ուղղին զուգահեռ ուղիղ՝ AM-ը (նկ.18): Քանի որ a ուղիղը զուգահեռ է α և β հարթություններին, ապա AM ուղիղն ընկած է ինչպես α, այնպես էլ β հարթությունների մեջ (կետ 6-ի 2^0 պնդումը):

Այսպիսով՝ AM-ը այն ուղիղն է, որով հատվում են α և β հարթությունները, այսինքն՝ այն համընկնում է AB ուղղին: Հետևաբար՝ $AB \parallel a$:



Նկ. 18

33. Ապացուցեք, որ եթե մի ուղղով չանցնող երեք հարթություններ զույգ առ զույգ հատվում են, ապա այն ուղիղները, որոնցով դրանք հատվում են, կա՛մ զուգահեռ են, կա՛մ էլ ունեն ընդհանուր կետ:

* «Տանենք ուղիղ», «տանենք հարթություն» արտահայտությունները, անշուշտ, պետք չէ տառացի հասկանալ (տարածության մեջ մենք չենք տանում ո՛չ ուղիղ, ո՛չ էլ հարթություն): Դրանք պարզապես նշանակում են, որ դիտարկման է առնվում նշված ուղիղը կամ հարթությունը:

§ 2 Տարածության մեջ ուղիղների փոխադարձ դասավորությունը: Երկու ուղիղների կազմած անկյունը

7 Խաչվող ուղիղներ

Եթե երկու ուղիղներ հատվում են կամ զուգահեռ են, ապա նրանք ընկած են մի հարթության մեջ: Սակայն երկու ուղիղները տարածության մեջ կարող են դասավորված լինել այնպես, որ չեն ընկնում մի հարթության մեջ, այսինքն՝ տարածության մեջ գոյություն չունի այնպիսի հարթություն, որն անցնի այդ երկու ուղիղներով: Պարզ է, որ այդպիսի ուղիղները ո չ հատվում են, և ո չ էլ զուգահեռ են:

Ս ա հ մ ա ն ու մ: *Երկու ուղիղներ կոչվում են խաչվող, եթե նրանք ընկած չեն մի հարթության մեջ:*

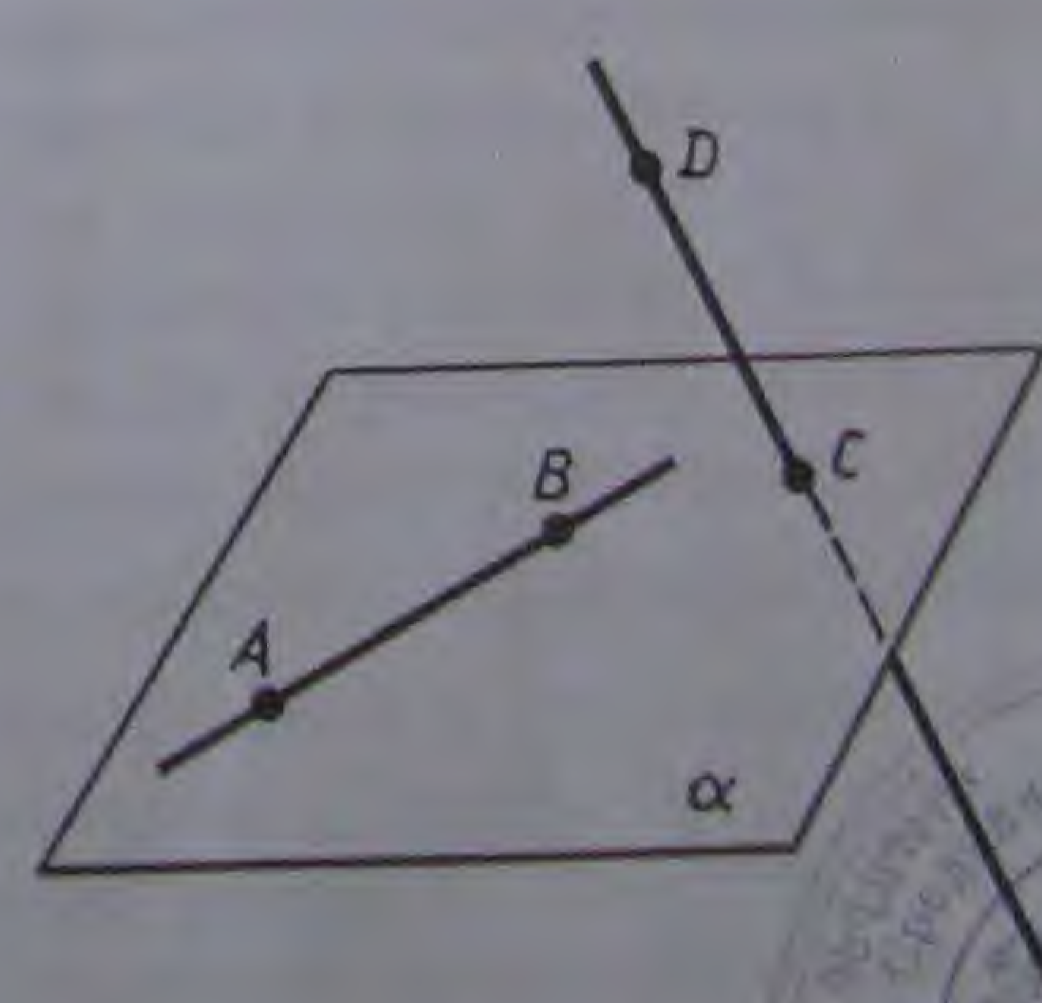
Խաչվող ուղիղների մասին ակնառու պատկերացում են տալիս այնպիսի երկու ճանապարհներ (դրանց լայնությունն անտեսվում է), որոնցից մեկն անցնում է կամրջի տակով, իսկ մյուսը՝ վրայով (նկ.19):

Ապացուցենք թեորեմ, որն արտահայտում է **խաչվող ուղիղների հայտանիշը**:

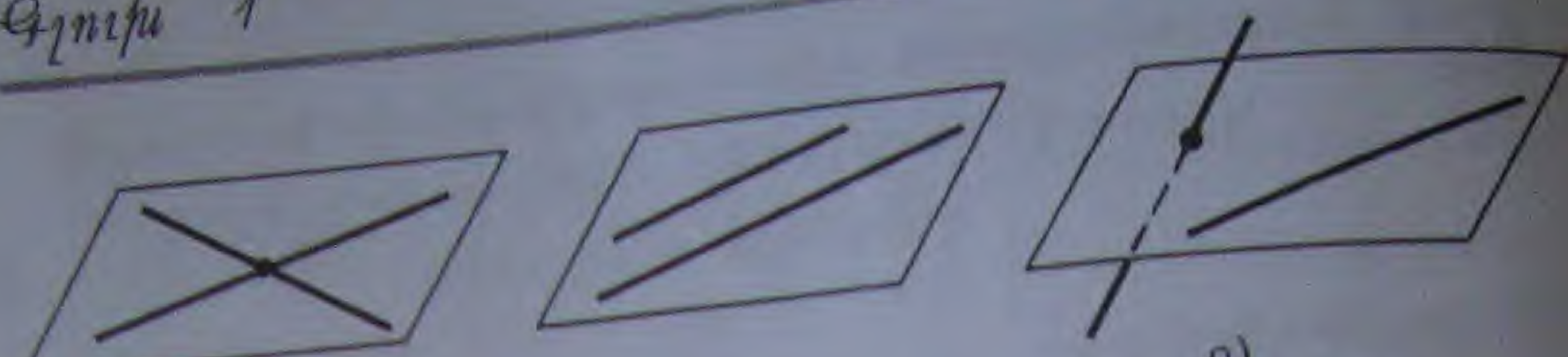
Թ ե ո ր ե մ: ***Եթե երկու ուղիղներից մեկն ընկած է որևէ հարթության մեջ, իսկ մյուս ուղիղն այդ հարթությունը հատում է առաջին ուղղի վրա չընկած կետում, ապա այդ ուղիղները խաչվող են:***

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Դիտարկենք α հարթության մեջ ընկած AB ուղիղը, և այդ հարթությունը C կետում հատող CD ուղիղը, ընդ որում՝ C կետն ընկած չէ AB ուղղի վրա (նկ.20):


Նկ. 19



Նկ. 20



Նկ. 21

Ապացուցենք, որ AB-ն և CD-ն խաչվող ուղիղներ են, այսինքն՝ նրանք ընկած չեն մի հարթության մեջ: Իսկապես, եթե ենթադրենք, թե AB և CD ուղիղներն ընկած են որևէ β հարթության մեջ, ապա կստացվի, որ b հարթությունն անցնում է AB ուղղով ու C կետով և, ուրեմն, համընկնում է α հարթությանը: Սակայն դա հնարավոր չէ, որովհետև CD ուղիղն ընկած չէ α հարթության մեջ: Թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով՝ **տարածության մեջ երկու ուղիղների փոխադարձ դասավորության համար հնարավոր են երեք դեպք.**

ա) ուղիղները հատվում են, այսինքն ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ (նկ.21ա),

բ) ուղիղները զուգահեռ են, այսինքն՝ ընկած են մի հարթության մեջ և չեն հատվում (նկ.21,բ),

գ) ուղիղները խաչվում են, այսինքն մի հարթության մեջ չեն ընկնում (նկ.21,գ):

Խաչվող ուղիղների մասին ապացուցենք ևս մեկ թեորեմ:

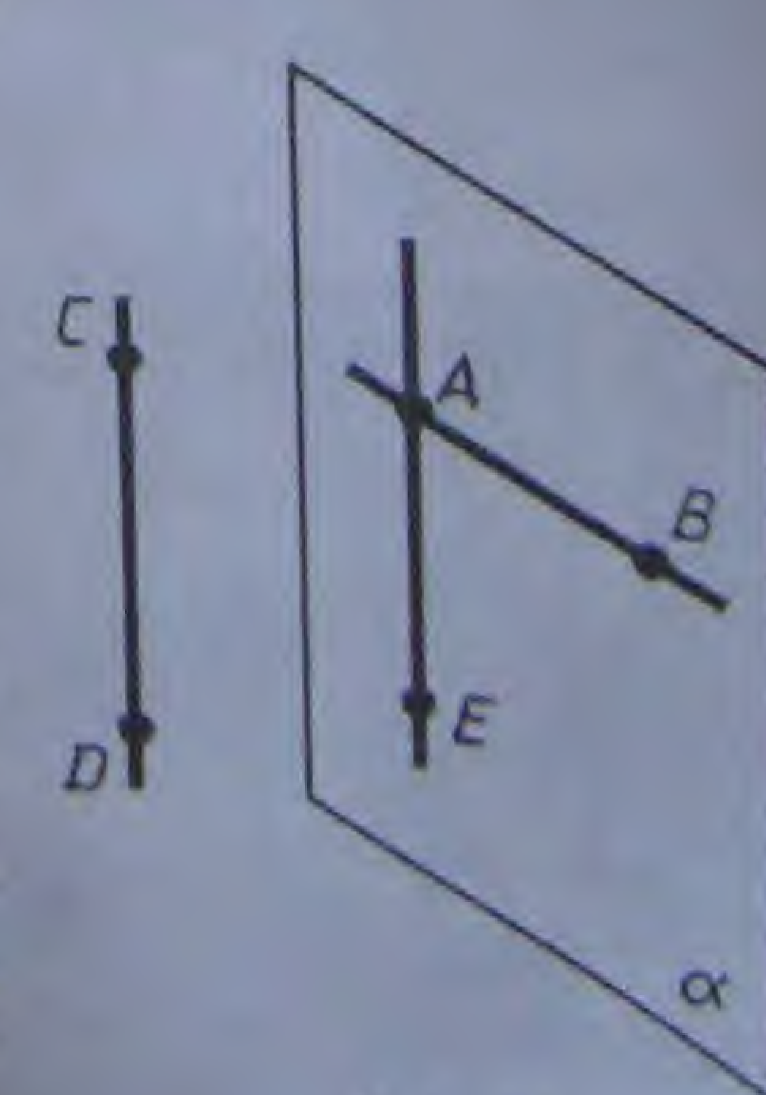
Թ ե ո ր ե մ : ***Երկու խաչվող ուղիղներից յուրաքանչյուրով անցնում է մյուս ուղղին զուգահեռ հարթություն, ընդ որում միայն մեկը:***

Ա պ ա ց ու ց ու մ : Դիտարկենք երկու խաչվող ուղիղներ՝ AB-ն և CD-ն (նկ.22): Ապացուցենք, որ AB ուղղով անցնում է CD ուղղին զուգահեռ հարթություն և այդպիսի հարթությունը միայն մեկն է:

A կետով տանենք CD ուղղին զուգահեռ AE ուղիղը: AB և AE ուղիղներով անցնում է հարթություն. այն նշանակենք α տառով:

Քանի որ CD ուղիղն ընկած չէ α հարթության մեջ և զուգահեռ է այդ հարթության AE ուղղին, ուրեմն այն զուգահեռ է α հարթությանը ($CD \parallel \alpha$):

Պարզ է, որ α հարթությունը միակն է, որն անցնում է AB ուղղով և զուգահեռ է CD ուղղին: Բանն այն է, որ AB ուղղով անցնող ցանկացած մեկ այլ հարթություն հատվում է AE ուղղին և, ուրեմն, հատվում է նաև նրան զուգահեռ CD ուղղին: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 22

Որպես այս թեորեմի ակնառու լուսաբանման օրինակ են ծառայում այն երկու ճանապարհները, որոնցից մեկն անցնում է կամրջի վրայով, մյուսը՝ կամրջի տակով (տե՛ս նկ.19): Կամրջատակի ճանապարհն ընկած է գետնի հարթության վրա, որն էլ զուգահեռ է կամրջի վրայով անցնող ճանապարհին: Հասկանալի է, որ կամրջի վրայի ճանապարհով և անցնում է հարթություն, որը զուգահեռ է գետնի հարթությանը, ինչպես նաև զուգահեռ է կամրջատակի ճանապարհին:

8 Համուղղված կողմերով անկյուններ

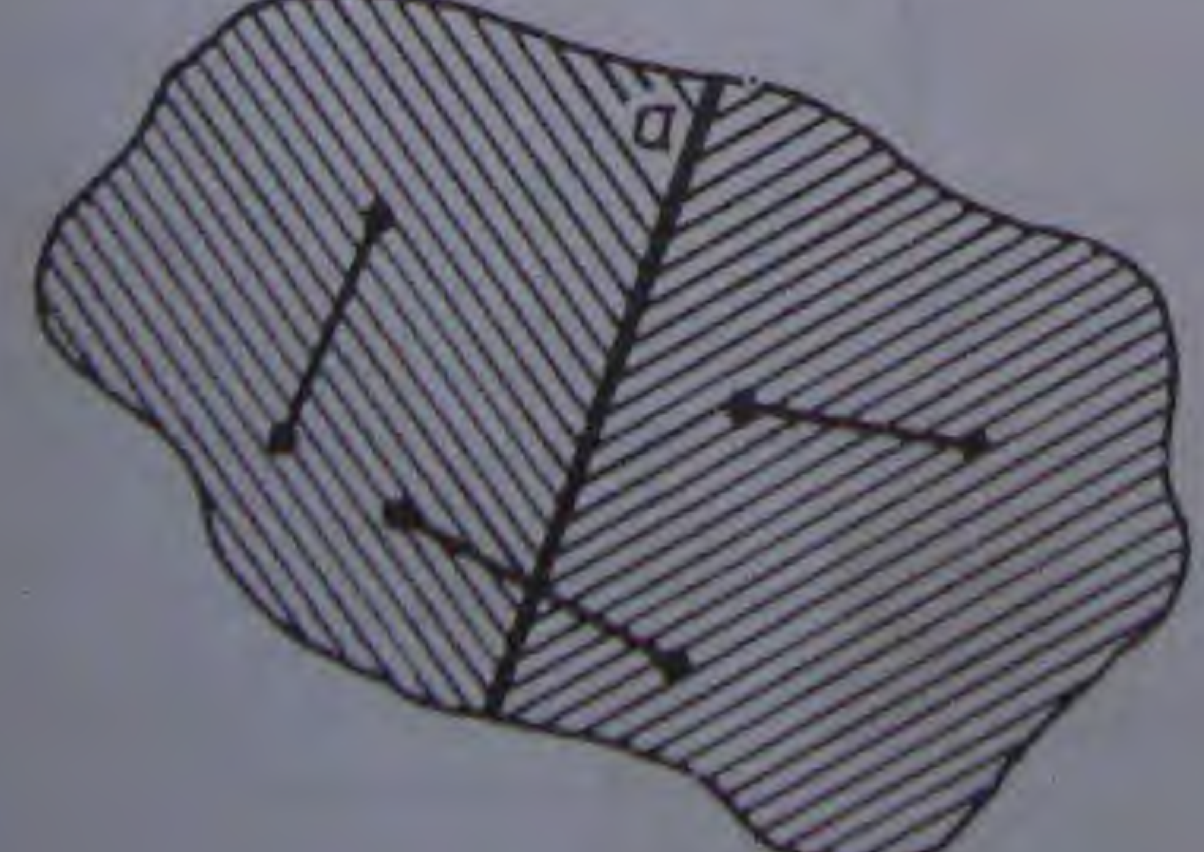
Համաձայն աքսիոմներից մեկի (տե՛ս հավելվածը 8-րդ կամ 10-րդ դաս. դասագրքում), հարթության մեջ ընկած ցանկացած a ուղիղ այդ հարթությունը տրոհում է երկու մասի, որոնք կոչվում են **կիսահարթություններ** (նկ.23): Այդ կիսահարթություններից յուրաքանչյուրի համար a ուղիղը կոչվում է **սահմանագիծ**: Միևնույն կիսահարթության ցանկացած երկու կետեր ընկած են a ուղղի մի կողմում, իսկ տարբեր կիսահարթությունների ցանկացած երկու կետեր՝ այդ ուղղի տարբեր կողմերում (տե՛ս նկ.23):

Մի ուղղի վրա չընկած երկու՝ OA և O_1A_1 ճառագայթները կոչվում են **համուղղված,** եթե նրանք զուգահեռ են և ընկած են OO_1 սահմանագծով կիսահարթություններից մեկում: Մի ուղղի վրա ընկած OA և O_1A_1 ճառագայթները կոչվում են **համուղղված,** եթե նրանք համընկնում են, կամ նրանցից մեկն ընդգրկում է մյուսը: Նկար 24-ում OA և O_1A_1 ճառագայթները, ինչպես նաև A_2B_2 և O_2B_2 ճառագայթները համուղղված են, իսկ OA և O_2A_2, OA և O_3A_3, O_2A_2 և O_2B_2 ճառագայթները համուղղված չեն (բացատրեք, թե ինչու):

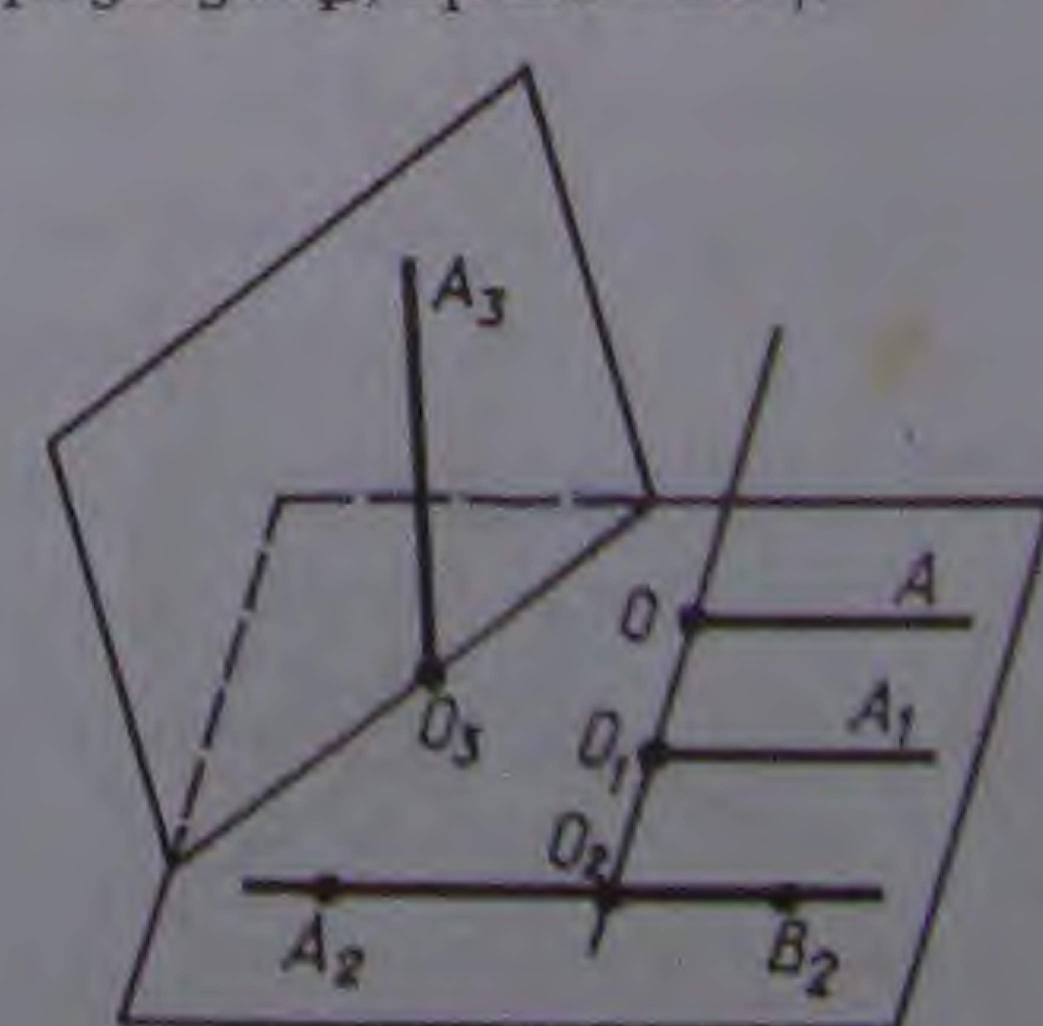
Ապացուցենք թեորեմ՝ համուղղված կողմերով անկյունների մասին:

Թ ե ո ր ե մ : ***Եթե երկու անկյունների կողմերը համապատասխանաբար համուղղված են, ապա այդպիսի անկյունները հավասար են:***

Ա պ ա ց ու ց ու մ : Դիտարկենք համապատասխանաբար համուղղված կողմերով O և O_1 անկյունները և ապացուցենք, որ $\angle O=\angle O_1$:

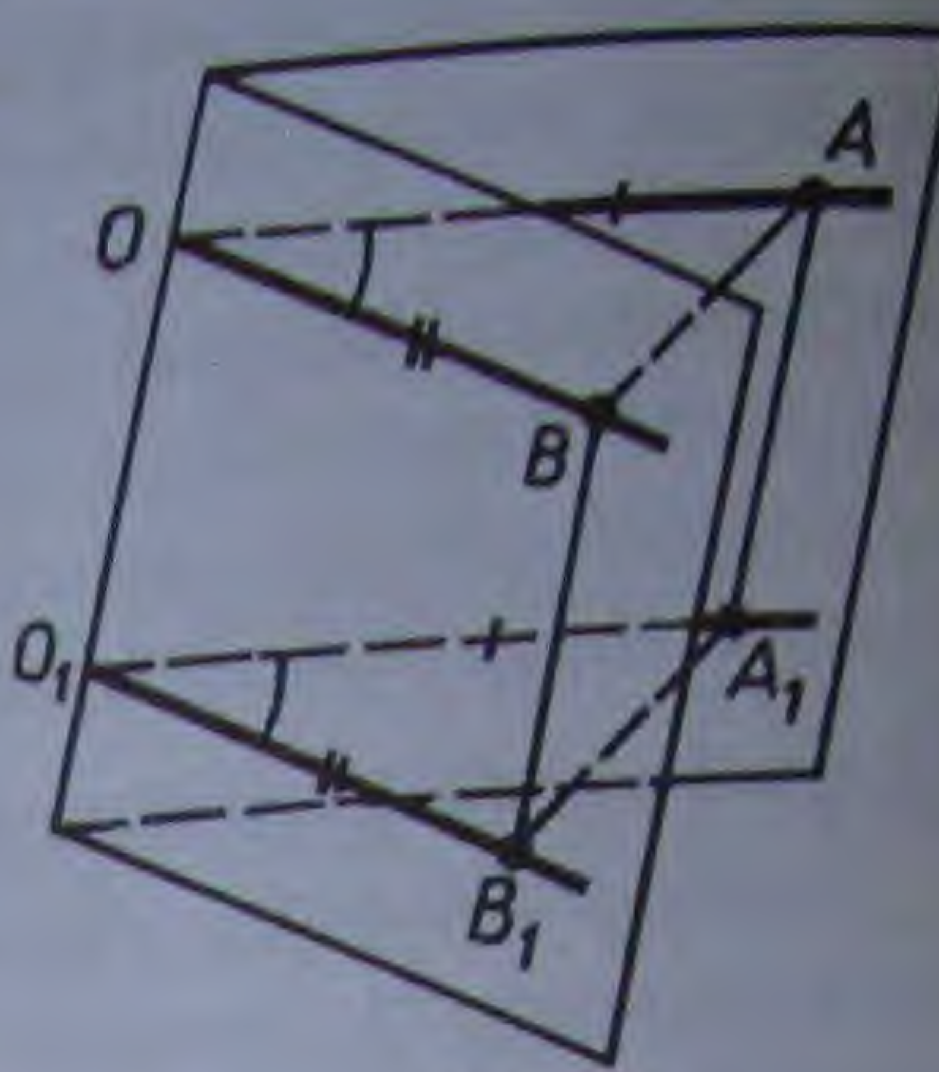


Նկ. 23



Նկ. 24

O անկյան կողմերի վրա նշենք որևէ A և B կետեր, և O_1 անկյան համապատասխան կողմերի վրա տեղադրենք հատվածներ՝ $O_1A_1=OA$ և $O_1B_1=OB$ (նկ.25):



Նկ. 25

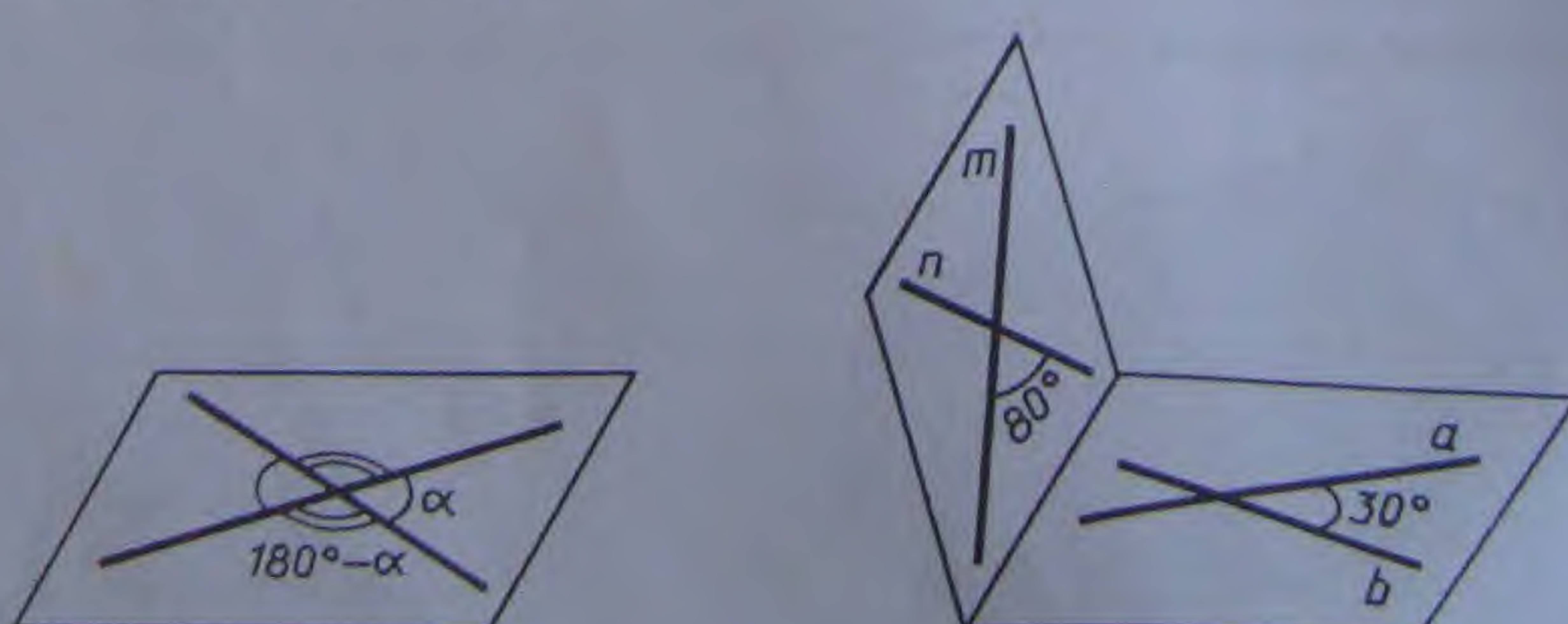
Դիտարկենք OO_1A_1A քառանկյունը. այն զուգահեռագիծ է, քանի որ նրա OA և O_1A_1 հանդիպակաց կողմերը զուգահեռ են և հավասար: Դրանից հետևում է, որ $AA_1 \parallel OO_1$ և $AA_1=OO_1$: Համանման ձևով՝ OO_1B_1B քառանկյունը ևս զուգահեռագիծ է, ուրեմն՝ $BB_1 \parallel OO_1$ և $BB_1=OO_1$:

Քանի որ $AA_1 \parallel OO_1$ և $BB_1 \parallel OO_1$, ապա, ըստ երեք զուգահեռ ուղիղների մասին թեորեմի, $AA_1 \parallel BB_1$: Դրա հետ մեկտեղ՝ $AA_1=OO_1=BB_1$: Այսպիսով՝ ABB_1A_1 քառանկյան AA_1 և BB_1 հանդիպակաց կողմերը զուգահեռ են և հավասար: Հետևաբար՝ այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է և, ուրեմն, նրա AB և A_1B_1 հանդիպակաց կողմերը հավասար են:

Այժմ համեմատենք AOB և $A_1O_1B_1$ եռանկյունները: Դրանք հավասար են՝ ըստ երեք կողմերի: Ուրեմն՝ $\angle O=\angle O_1$: Թեորեմն ապացուցված է:

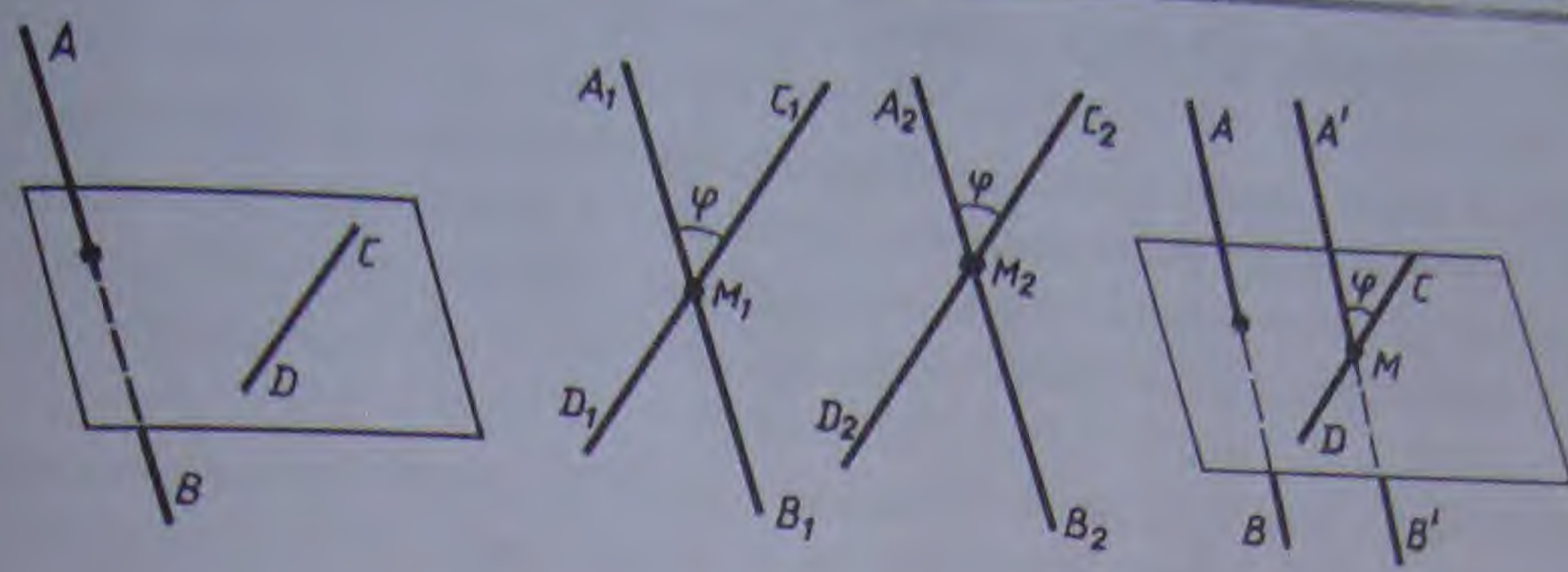
9 Ուղիղների կազմած անկյունը

Ցանկացած երկու հատվող ուղիղներն ընկած են մի հարթության մեջ և կազմում են չորս չփռված անկյուններ: Եթե հայտնի է այդ անկյուններից մեկը, ապա կարելի է գտնել մյուս երեք անկյունները ևս (նկ.26,ա): Դիցուք՝ α-ն անկյուններից այն մեկն է, որ չի գերազանցում մյուս երեք անկյուններից ցանկացածը: Այդ դեպքում ասում են, որ **հատվող ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է** α:



ա) բ)

Նկ. 26



ա) բ) գ)

Նկ. 27

Ակնհայտ է, որ $0° < \alpha \leq 90°$: 26,բ նկարում a և b ուղիղների կազմած անկյունը $30°$ է, իսկ m և n ուղիղների կազմած անկյունը՝ $80°$:

Այժմ ներմուծենք խաչվող ուղիղների կազմած անկյան հասկացությունը: Դիցուք՝ AB-ն և CD-ն երկու խաչվող ուղիղներ են (նկ.27,ա): Տարածության կամայական M_1 կետով տանենք AB և CD ուղիղներին համապատասխանաբար զուգահեռ A_1B_1 և C_1D_1 ուղիղները (նկ.27,բ):

Եթե A_1B_1 և C_1D_1 ուղիղների կազմած անկյունը φ է, ապա կասենք, որ **AB և CD խաչվող ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է φ:**

Ապացուցենք, որ խաչվող ուղիղների կազմած անկյունը կախում չունի M_1 կետի ընտրությունից: Իսկապես, վերցնենք մեկ այլ՝ ցանկացած M_2 կետ, նրանով տանենք AB և CD ուղիղներին համապատասխանաբար զուգահեռ A_2B_2 և C_2D_2 ուղիղները (նկ.27,բ): Քանի որ $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $C_1D_1 \parallel C_2D_2$ (բացատրեք, թե ինչու), ապա M_1 և M_2 գագաթներով անկյունների կողմերը համապատասխանաբար համուղղված են (27,բ նկարում այդպիսի անկյուններն են $\angle A_1M_1C_1$-ը և $\angle A_2M_2C_2$-ը, $\angle A_1M_1D_1$-ը և $\angle A_2M_2D_2$-ը և այլն): Ուրեմն՝ այդ անկյունները համապատասխանաբար հավասար են: Հետևաբար՝ A_2B_2 և C_2D_2 ուղիղների կազմած անկյունը նս φ է:

Ուրեմն՝ որպես M_1 կետ կարելի է վերցնել խաչվող ուղիղներից մեկի վրա ընկած ցանկացած կետը: 27,գ նկարում CD ուղղի վրա նշված է M կետը, և նրանով տարված է AB ուղղին զուգահեռ $A'B'$ ուղիղը: $A'B'$ և CD ուղիղների կազմած անկյունը նս φ է:

Հարցեր և խնդիրներ

34. D կետն ընկած չէ ABC եռանկյան հարթության մեջ, M, N, և P կետերը համապատասխանաբար DA, DB և DC հատվածների միջնակետերն են, K կետն ընկած է BN հատվածի վրա: Պարզեք հետևյալ ուղիղների փոխադարձ դասավորությունը. **ա)** ND և AB, **բ)** PK և BC, **գ)** MN և AB, **դ)** MP և AC, **ե)** KN և AC, **զ)** MD և BC:

35. a ուղղի վրա չընկած M կետով տարված են երկու ուղիղներ, որոնք a ուղղի հետ չունեն ընդհանուր կետ: Ապացուցեք, որ այդ ուղիղներից առնվազն մեկը և a ուղիղը խաչվող ուղիղներ են:

36. c ուղիղը հատում է a ուղիղը և չի հատում b ուղիղը, իսկ b ուղիղը զուգահեռ է a ուղղին: Ապացուցեք, որ b-ն և c-ն խաչվող ուղիղներ են:

37. m ուղիղը հատում է ABC եռանկյան AB կողմը: Ինչպիսի՞ փոխադարձ դասավորություն ունեն m և BC ուղիղները, եթե. **ա)** m ուղիղն ընկած է ABC հարթության մեջ և ընդհանուր կետեր չունի AC հատվածի հետ, **բ)** m ուղիղը ընկած չէ ABC հարթության մեջ:

38. $ABCD$ շեղանկյան A գագաթով տարված է BD անկյունագծին զուգահեռ a ուղիղը, իսկ C գագաթով՝ այնպիսի b ուղիղ, որն ընկած չէ շեղանկյան հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ. **ա)** a և CD ուղիղները հատվում են, **բ)** a-ն և b-ն խաչվող ուղիղներ են:

39. Ապացուցեք, որ եթե AB-ն և CD-ն խաչվող ուղիղներ են, ապա AD-ն և BC-ն նույնպես խաչվող ուղիղներ են:

40. a և b խաչվող ուղիղների վրա նշված են, համապատասխանաբար, M և N կետերը: a ուղղով և N կետով տարված է α հարթությունը, իսկ b ուղղով և M կետով՝ β հարթությունը: **ա)** b ուղիղն ընկա՞ծ է, արդյոք, α հարթության մեջ: **բ)** Հատվու՞մ են, արդյոք, α և β հարթությունները: Դրական պատասխանի դեպքում նշեք այն ուղիղը, որով նրանք հատվում են:

41. Կարո՞ղ է, արդյոք, երկու խաչվող ուղիղներից յուրաքանչյուրը զուգահեռ լինել երրորդ ուղղին: Պատասխանը հիմնավորեք:

42. Տրված են $ABCD$ զուգահեռագիծը և EK հիմքով $ABEK$ սեղանը, ընդ որում՝ դրանք մի հարթության մեջ չեն ընկած: **ա)** Պարզեք CD և EK ուղիղների փոխադարձ դասավորությունը: **բ)** Գտեք սեղանի պարագիծը, եթե հայտնի է, որ նրան կարելի է ներգծել շրջանագիծ, և AB=22,5սմ, EK=27,5սմ:

43. Ապացուցեք, որ տարածական քառանկյան* կողմերի միջնակետերը զուգահեռագծի գագաթներ են:

---

* Քառանկյունը կոչվում է *տարածական*, եթե նրա գագաթներն ընկած չեն մի հարթության մեջ:

44. OB և CD ուղիղները զուգահեռ են, իսկ OA–ն և CD-ն խաչվող ուղիղներ են: Գտեք OA և CD ուղիղների կազմած անկյունը, եթե. **ա)** $\angle AOB=40°$, **բ)** $\angle AOB=135°$, **գ)** $\angle AOB=90°$:

45. a ուղիղը զուգահեռ է $ABCD$ զուգահեռագծի BC կողմին և ընկած չէ զուգահեռագծի հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ a–ն և CD-ն խաչվող ուղիղներ են, և գտեք նրանց կազմած անկյունը, եթե զուգահեռագծի անկյուններից մեկը հավասար է. **ա)** $50°$, **բ)** $121°$:

46. m ուղիղը զուգահեռ է $ABCD$ շեղանկյան BD անկյունագծին և ընկած չէ շեղանկյան հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ. **ա)** m-ը և AC-ն խաչվող ուղիղներ են, և գտեք նրանց կազմած անկյունը, **բ)** m-ը և AD-ն խաչվող ուղիղներ են, և գտեք նրանց կազմած անկյունը, եթե ABC անկյունը $128°$ է:

47. $ABCD$ տարածական քառանկյան AB և CD կողմերը հավասար են: Ապացուցեք, որ AB և CD ուղիղները կազմում են հավասար անկյուններ այն ուղղի հետ, որն անցնում է BC և AD հատվածների միջնակետերով:

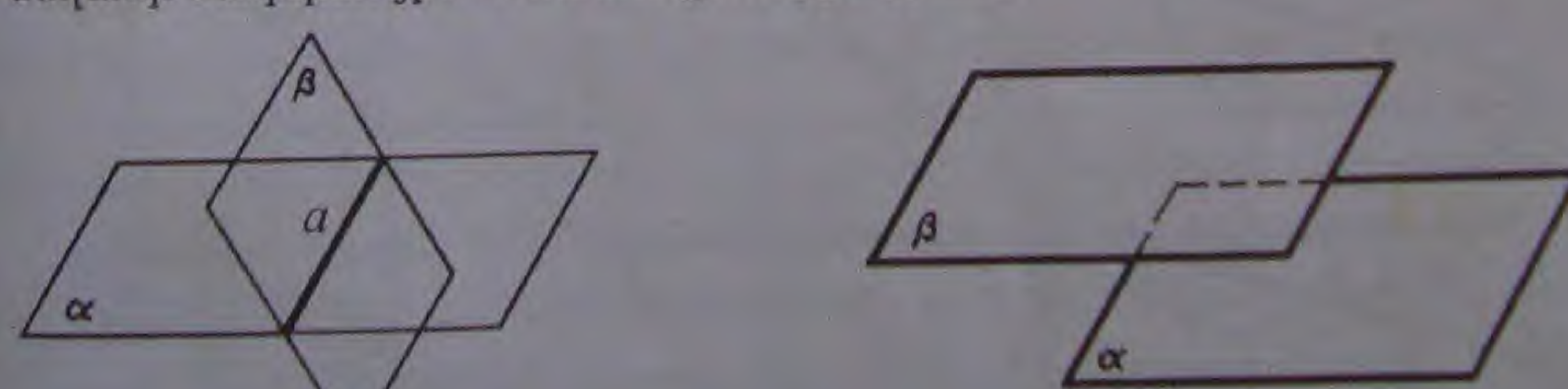
§ 3 Հարթությունների զուգահեռությունը

(10) Զուգահեռ հարթություններ

Մենք գիտենք, որ եթե երկու հարթությունները ունեն ընդհանուր կետ, ապա նրանք հատվում են ուղղով (աքսիոմ Ա-3): Դրանից հետևում է, որ երկու հարթությունները կա՛մ հատվում են ուղղով (նկ.28,ա), կա՛մ չեն հատվում, այսինքն ոչ մի ընդհանուր կետ չունեն (նկ.28,բ):

Ս ա հ մ ա ն ու մ : ***Երկու հարթություններ կոչվում են զուգահեռ, եթե նրանք չեն հատվում:***

Զուգահեռ հարթությունների մասին ակնառու պատկերացումներ են տալիս սենյակի հատակն ու առաստաղը, երկու հանդիպակաց պատերը, սեղանի մակերևույթն ու հատակի հարթությունը:



ա) α և β հարթությունները հատվում են

բ) α և β հարթությունները զուգահեռ են

Նկ. 28

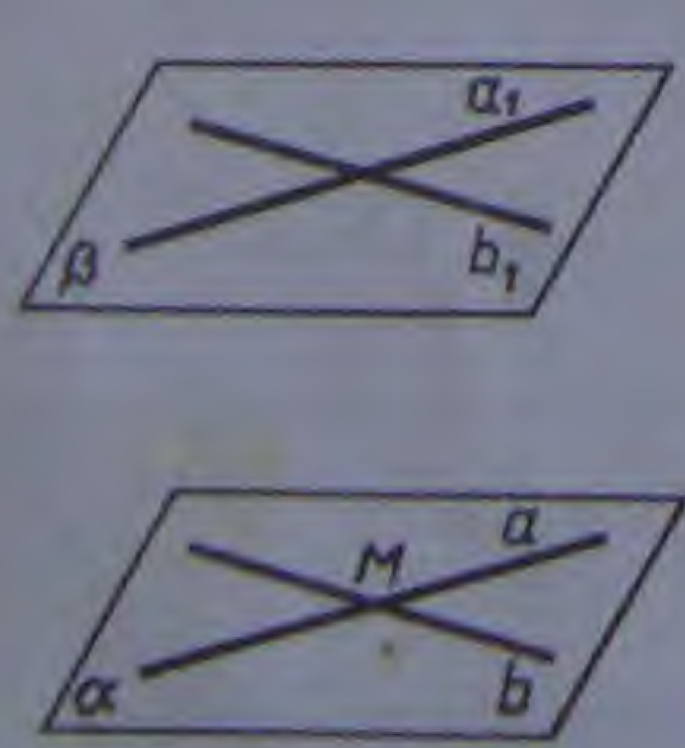
α և β հարթությունների զուգահեռությունը նշանակվում է այսպես՝ α∥β: Քննության առնենք երկու հարթությունների զուգահեռության հայտանիշը:

Թ ե ո ր ե մ : ***Եթե մի հարթության երկու հատվող ուղիղներ համապատասխանաբար զուգահեռ են մյուս հարթության երկու ուղիղներին, ապա այդպիսի հարթությունները զուգահեռ են:***

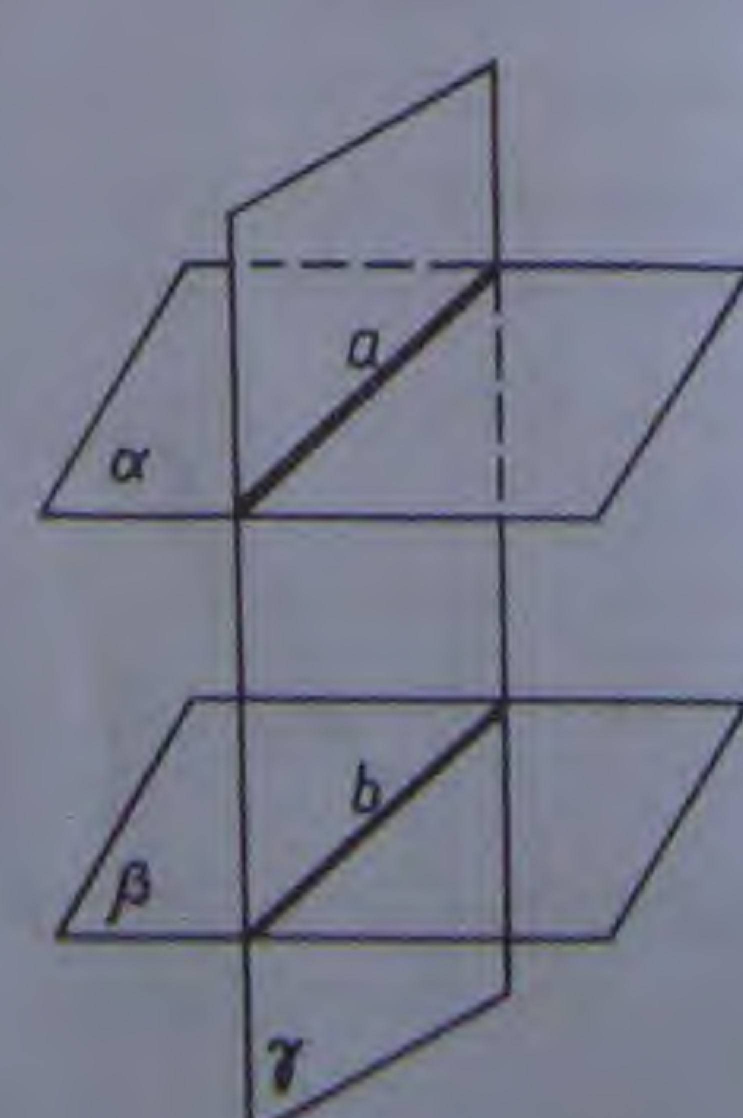
Ա պ ա ց ո ւ յ ց ։ Դիտարկենք երկու հարթություններ՝ α-ն և β-ն (նկ.29): Դիցուք՝ a և b ուղիղներն ընկած են α հարթության մեջ և հատվում են M կետում, իսկ a_1 և b_1 ուղիղներն ընկած են β հարթության մեջ այնպես, որ $a \parallel a_1$ և $b \parallel b_1$: Ապացուցենք, որ α∥β: Նախ նկատենք, որ ըստ ուղղի և հարթության զուգահեռության հայտանիշի՝ $a \parallel \beta$ և $b \parallel \beta$:

Ենթադրենք, թե α և β հարթությունները զուգահեռ չեն: Այդ դեպքում նրանք հատվում են մի որևէ c ուղղով: Ստացվում է, որ α հարթությունն անցնում է β հարթությանը զուգահեռ a ուղղով և հատում է β հարթությունը c ուղղով: Ուրեմն՝ a ուղիղը զուգահեռ է հարթությունների հատման c ուղղին՝ $a \parallel c$ (ըստ կետ 6-ի 1° հատկության):

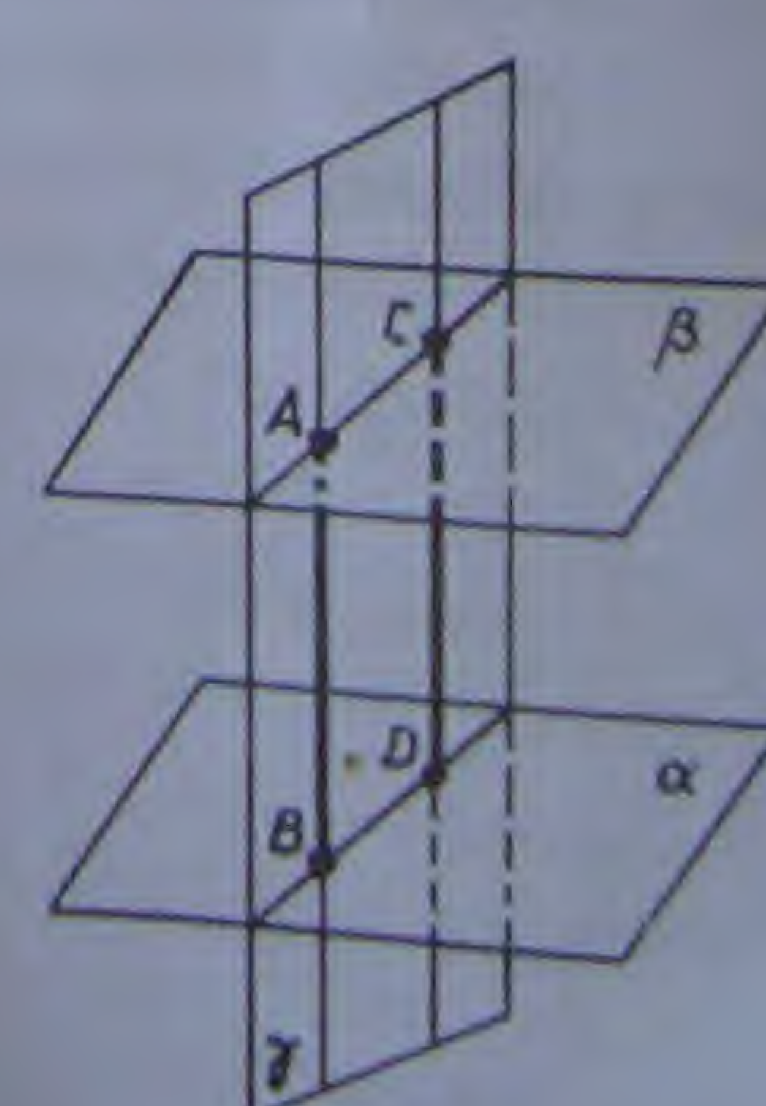
Սակայն, α հարթությունն անցնում է նաև b ուղղով, որը զուգահեռ է β հարթությանը, և ուրեմն՝ $b \parallel c$: Այսպիսով՝ M կետով անցնում են երկու ուղիղներ՝ a-ն և b-ն, որոնք զուգահեռ են նույն c ուղղին: Այնինչ՝ դա հնարավոր չէ, քանի որ ըստ զուգահեռ ուղիղների մասին թեորեմի՝ M կետով անցնում է c ուղղին զուգահեռ միայն մեկ ուղիղ: Ուրեմն՝ մեր ենթադրությունը ճշմարիտ չէ, հետևաբար՝ α∥β: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 29



Նկ. 30



Նկ. 31

11 Զուգահեռ հարթությունների հատկությունները

Քննության առնենք զուգահեռ հարթությունների երկու հատկություն:

1^0. ***Եթե երկու զուգահեռ հարթություններ հատվում են երրորդով, ապա դրանց հատման գծերը զուգահեռ են:***

Իբրև այս փաստի ակնառու հաստատման օրինակ կարելի է դիտել սենյակի հատակի և առաստաղի հատման գծերը որևէ պատի հետ. այդ գծերը զուգահեռ են:

Տվյալ հատկությունն ապացուցելու համար դիտարկենք a և b ուղիղները, որոնցով α և β հարթությունները հատվում են γ հարթությանը (նկ.30): Ապացուցենք, որ a և b ուղիղները զուգահեռ են:

Այդ ուղիղներն ընկած են մի հարթության (γ հարթության) մեջ և չեն հատվում: Բանն այն է, որ եթե a և b ուղիղները հատվեին, ապա α և β հարթությունները կունենային ընդհանուր կետ, ինչը հնարավոր չէ, որովհետև այդ հարթությունները զուգահեռ են:

Այսպիսով՝ a և b ուղիղներն ընկած են մի հարթության մեջ և չեն հատվում, այսինքն՝ a և b ուղիղները զուգահեռ են:

2^0. ***Զուգահեռ ուղիղների այն հատվածները, որոնք առնված են զուգահեռ հարթությունների միջև, հավասար են:***

Այս հատկությունն ապացուցելու համար դիտարկենք երկու զուգահեռ ուղիղների AB և CD հատվածները, որոնք առնված են α և β զուգահեռ հարթությունների միջև (նկ.31): Ապացուցենք, որ $AB=CD$: AB և CD զուգահեռ ուղիղներով անցնող γ հարթությունը α և β հարթություններին հատվում է AC և BD զուգահեռ ուղիղներով (հատկություն 1^0): Այսպիսով՝ $ABCD$ քառանկյան հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են: Ուրեմն $ABCD$-ն զուգահեռագիծ է: Իսկ զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերը հավասար են և, ուրեմն, AB և CD հատվածները հավասար են:

Հարցեր և խնդիրներ

48. Դասարանում առկա պարագաների միջոցով ցույց տվեք զուգահեռ հարթությունների մոդելներ:

49. m ուղիղը B կետում հատում է α հարթությունը: Գոյություն ունի՞, արդյոք, հարթություն, որն անցնում է m ուղղով և զուգահեռ է α հարթությանը:

50. α և β հարթությունները զուգահեռ են, m ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ m ուղիղը զուգահեռ է β հարթությանը:

51. Ապացուցեք, որ α և β հարթությունները զուգահեռ են, եթե α հարթության երկու՝ m և n հատվող ուղիղները զուգահեռ են β հարթությանը:

52. Եռանկյան երկու կողմերը զուգահեռ են α հարթությանը: Ապացուցեք, որ α հարթությանը զուգահեռ է նաև երրորդ կողմը:

53. Մի հարթության մեջ չընկած երեք հատվածներ՝ A_1A_2-ը, B_1B_2-ը և C_1C_2-ը, ունեն ընդհանուր միջնակետ: Ապացուցեք, որ $A_1B_1C_1$ և $A_2B_2C_2$ հարթությունները զուգահեռ են:

54. B կետն ընկած չէ ADC եռանկյան հարթության մեջ, իսկ M, N, և P կետերը, համապատասխանաբար, BA, BC և BD հատվածների միջնակետերն են:

ա) Ապացուցեք, որ MNP և ADC հարթությունները զուգահեռ են:

բ) Գտեք MNP եռանկյան մակերեսը, եթե ADC եռանկյան մակերեսը $48սմ^2$ է:

55. Ապացուցեք, որ եթե a ուղիղը հատում է α հարթությունը, ապա այն հատում է նաև α հարթությանը զուգահեռ ցանկացած հարթություն:

Լուծում: Դիտարկենք α հարթությանը զուգահեռ կամայական β հարթություն: β հարթության մի որևէ B կետով տանենք b ուղիղը՝ զուգահեռ a ուղղին: Քանի որ a ուղիղը հատում է α հարթությունը, ուրեմն b ուղիղը նույնպես հատում է այդ հարթությունը: Հետևաբար՝ b ուղիղը հատում է նաև β հարթությունը (այլ ոչ թե ընկած է նրա մեջ): Ուրեմն՝ a ուղիղը նույնպես հատում է β հարթությունը:

56. α և β հարթությունները զուգահեռ են, A-ն α հարթության կետ է: Ապացուցեք, որ A կետով անցնող և β հարթությանը զուգահեռ ցանկացած ուղիղ ընկած է α հարթության մեջ:

57. a ուղիղը զուգահեռ է երկու զուգահեռ հարթություններից մեկին: Ապացուցեք, որ a ուղիղը կա՛մ զուգահեռ է մյուս հարթությանը, կամ էլ ընկած է նրա մեջ:

58. Ապացուցեք, որ եթե γ հարթությունը հատում է α և β զուգահեռ հարթություններից մեկը, ապա այն հատում է նաև մյուս հարթությունը:

Լուծում: Դիցուք՝ γ հարթությունը a ուղղով հատում է α հարթությունը: Ապացուցեք, որ γ հարթությունը հատում է նաև β հարթությունը:

γ հարթության մեջ տանենք a ուղիղը հատող b ուղիղ: b ուղիղը հատում է α հարթությունը և, ուրեմն, այն հատում է նաև նրան զուգահեռ β հարթությունը (խնդիր 55): Հետևաբար՝ γ հարթությունը, որի մեջ է ընկած b ուղիղը, նույնպես հատում է β հարթությունը:

59. Ապացուցեք, որ α հարթության մեջ չընկած A կետով անցնում է α հարթությանը զուգահեռ հարթություն, ընդ որում՝ միայն մեկը:

Լուծում: α հարթության մեջ տանենք երկու հատվող ուղիղներ՝ a-ն և b-ն, իսկ A կետով տանենք a_1 և b_1 ուղիղները, որոնք զուգահեռ են, համապատասխանաբար, a և b ուղիղներին: Դիտարկենք a_1 և b_1 ուղիղներով անցնող β հարթությունը: Հենց β հարթությունն էլ որոնելին է, քանի որ այն անցնում է A կետով և զուգահեռ է α հարթությանը՝ ըստ երկու հարթությունների զուգահեռության հայտանիշի:

Այժմ ապացուցենք, որ β-ն միակ հարթությունն է, որ անցնում է տրված A կետով և զուգահեռ է α հարթությանը: Բանն այն է, որ A կետով անցնող ցանկացած այլ հարթություն հատվում է β հարթյանը և, ուրեմն, հատվում է նաև նրան զուգահեռ α հարթությանը (խնդիր 58):

60. Երկու հարթություններ՝ α-ն և β-ն, զուգահեռ են γ հարթությանը: Ապացուցեք, որ α և β հարթությունները զուգահեռ են:

61. Տրված են a և b հատվող ուղիղները և մի A կետ, որն ընկած չէ այդ ուղիղների հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ A կետով անցնում է a և b ուղիղներին զուգահեռ հարթություն, ընդ որում՝ միայն մեկը:

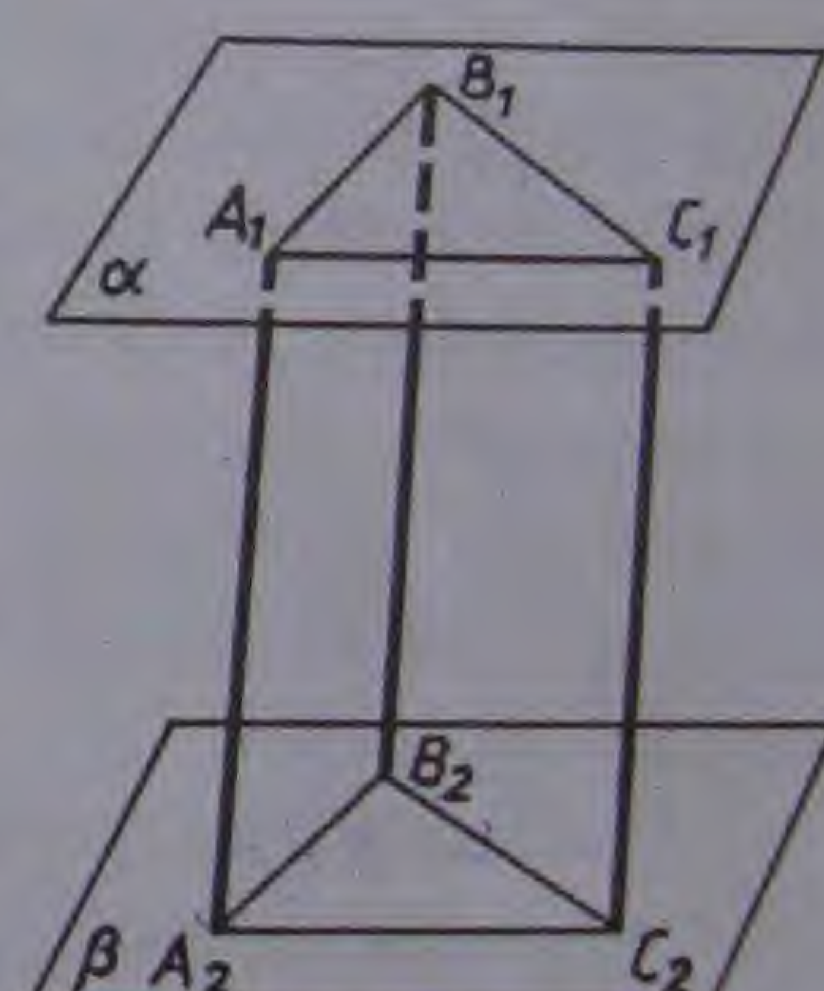
62. Անկյունաչափ սարքերի սկավառակի տեղակայման հորիզոնական լինելն ստուգելու համար օգտվում են երկու հարթաչափերից, որոնք սկավառակի հարթության մեջ տեղադրվում են հատվող ուղիղների վրա: Ինչու՞ չի կարելի հարթաչափերը տեղադրել զուգահեռ ուղիղների վրա:

63. α և β զուգահեռ հարթությունները հատում են BAC անկյան AB կողմը համապատասխանաբար A_1 և A_2 կետերում, իսկ AC կողմը՝ B_1 և B_2 կետերում: Գտեք. **ա)** AA_2-ը և AB_2-ը, եթե $A_1A_2=2A_1A=12$սմ, $AB_1=5$սմ,

բ) A_2B_2-ը և AA_2-ը, եթե $A_1B_1=18$սմ, $AA_1=24$սմ, $AA_2=\frac{3}{2}A_1A_2$:

64. Մի կետով անցնող և նույն հարթության մեջ չընկած երեք ուղիղներ հատում են զուգահեռ հարթություններից մեկը A_1, B_1 և C_1 կետերում, իսկ մյուսը՝ A_2, B_2 և C_2 կետերում: Ապացուցեք, որ $A_1B_1C_1$ և $A_2B_2C_2$ եռանկյունները նման են:

65. A_1A_2, B_1B_2 և C_1C_2 զուգահեռ հատվածներն առնված են α և β զուգահեռ հարթությունների միջև (նկ.32): **ա)** Որոշեք $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$ և $A_1C_1C_2A_2$ քառանկյունների տեսակը: **բ)** Ապացուցեք, որ $\Delta A_1B_1C_1=\Delta A_2B_2C_2$:

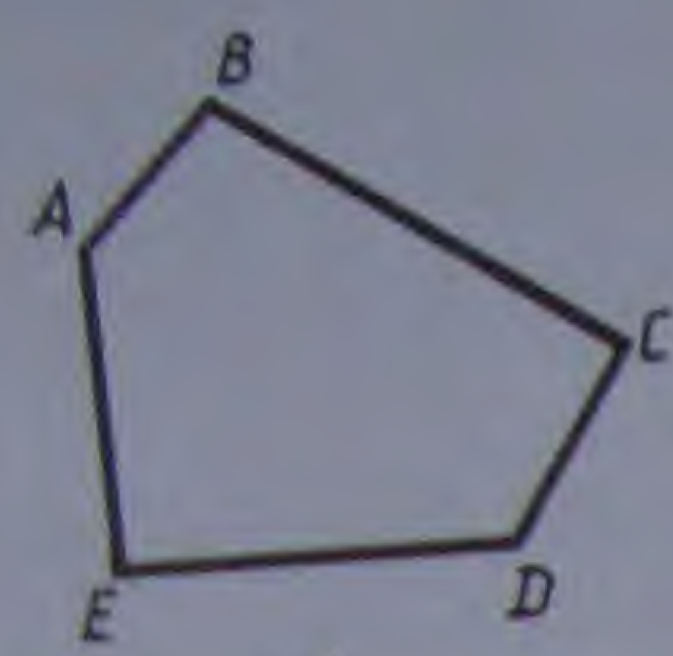


Նկ. 32

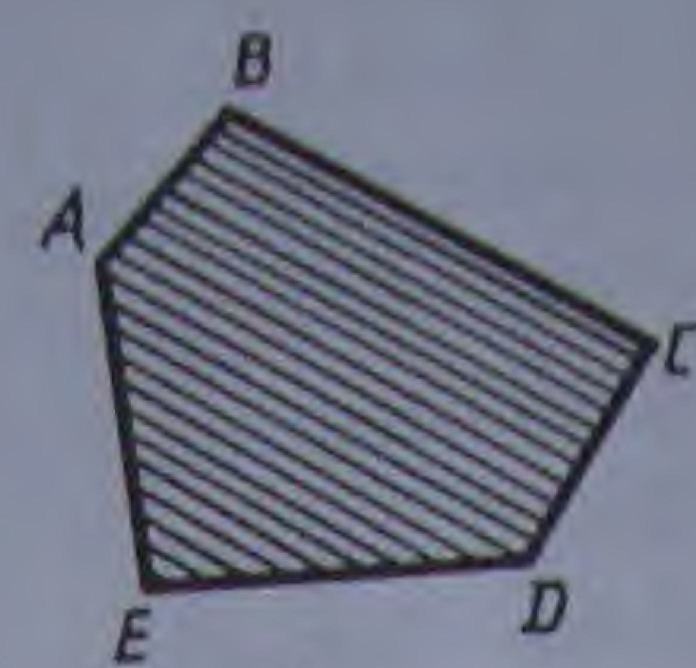
§ 4 Քառանիստ և զուգահեռանիստ

12 Քառանիստ

Մաթեմատիկայի նախորդ տարիների դասընթացում մենք ստացել ենք նախնական պատկերացումներ բազմանիստերի մասին: Հիշենք, որ բազմանիստն այնպիսի երկրաչափական մարմին է, որի մակերևույթը կազմված է միայն բազմանկյուններից: Բազմանիստերին մենք նվիրելու ենք մեր դասընթացի գլուխներից մեկը: Սակայն նախքան բազմանիստերի

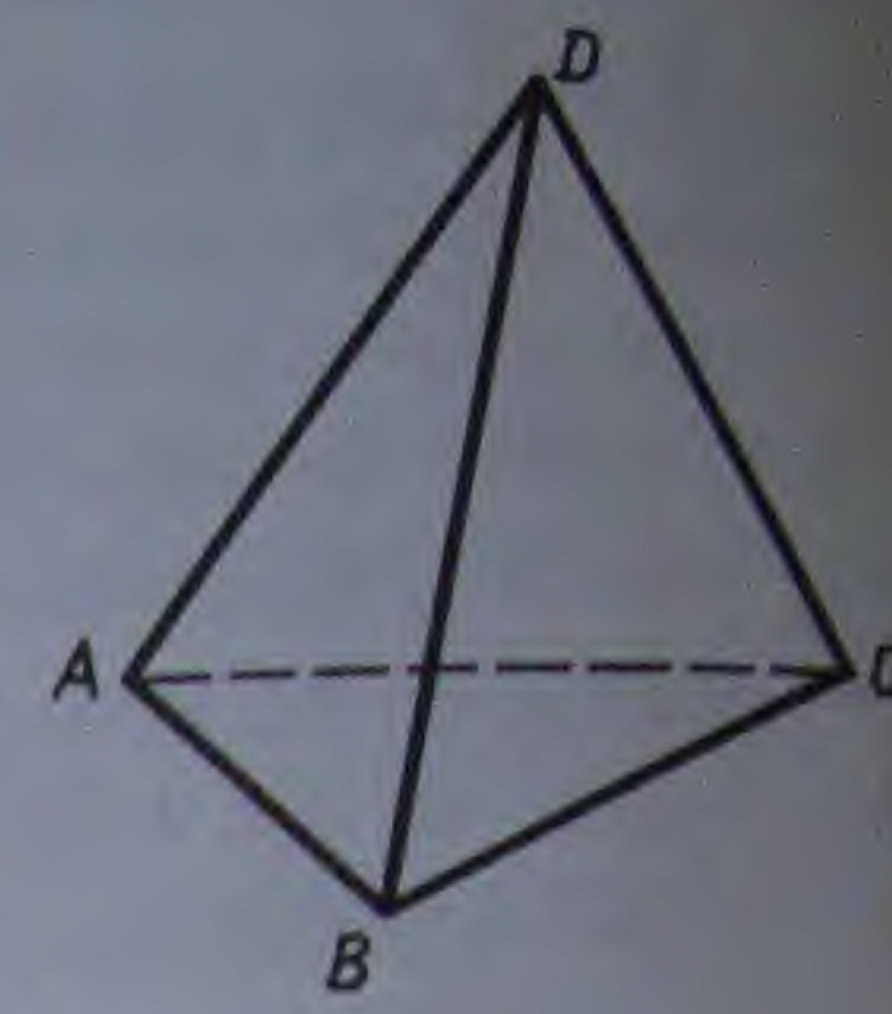


ա)
ABCDE բազմանկյուն՝ հատվածներից կազմված պատկեր



բ)
ABCDE բազմանկյուն՝ հարթության մի մասը, որ սահմանափակված է ABCDE գծով

Նկ. 33



Նկ. 34

հանգամանալի հետազոտությունը, այժմ ուսումնասիրենք դրանցից երկուսը՝ **քառանիստը** և **զուգահեռանիստը**: Դա մեզ հնարավորություն կընձեռի՝ ուղիղների և հարթությունների փոխադարձ դասավորությանը վերաբերող հասկացությունները լուսաբանել այդ երկու կարևոր երկրաչափական մարմինների օրինակով:

Նախքան քառանիստի և զուգահեռանիստի հասկացությունների ներմուծումը՝ վերհիշենք, թե հարթաչափության մեջ ինչ ենք հասկացել՝ ասելով բազմանկյուն: Բազմանկյունը մենք դիտել ենք կա՛մ որպես հատվածներից կազմված և ինքնահատում չունեցող փակ գիծ (նկ.33,ա), կամ էլ որպես հարթության մի մաս, որ սահմանափակված է այդ գծով՝ ներառյալ նաև եզրագիծը (նկ.33,բ): Տարածության մեջ մակերևույթներ և մարմիններ դիտարկելիս կօգտվենք բազմանկյան երկրորդ մեկնաբանումից: Ըստ այդպիսի մեկնաբանման՝ տարածության մեջ ցանկացած բազմանկյուն հարթ մակերևույթ է:

Այժմ անցնենք քառանիստի սահմանմանը:

Դիտարկենք կամայական ABC եռանկյուն և մի D կետ, որն ընկած չէ այդ եռանկյան հարթության մեջ: D կետը հատվածներով միացնենք ABC եռանկյան գագաթներին: Ստացվում են եռանկյուններ՝ DAB-ն, DBC-ն, DCA-ն: Այն մակերևույթը, որը կազմված է ABC, DAB, DBC և DCA չորս եռանկյուններից, կոչվում է **քառանիստ**. այն նշանակվում է այսպես՝ $DABC$ (նկ.34):

Քառանիստ կազմող եռանկյունները կոչվում են **նիստեր**, դրանց կողմերը՝ **քառանիստի կողեր**, իսկ գագաթները՝ **քառանիստի գագաթներ**: Քառանիստն ունի չորս նիստ, վեց կող և չորս գագաթ: Քառանիստի այն կողերը, որոնք չունեն ընդհանուր գագաթ, կոչվում են **հանդիպակաց**: Նկար 34-ում հանդիպակաց կողեր են AD-ն և BC-ն, BD-ն և AC-ն, CD-ն և AB-ն: Երբեմն քառանիստի նիստերից մեկն առանձնացնում են և այն անվանում **հիմք**, իսկ մյուս երեքը՝ **կողմնային նիստեր**:

Քառանիստը, սովորաբար, պատկերում են այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկար 34-ում և 35-ում, այսինքն՝ ուռուցիկ և ոչ ուռուցիկ քառանկյան տեսքով՝ պատկերված անկյունագծերի հետ միասին: Ընդ որում՝ չերևացող կողերը պատկերվում են ընդհատ գծերով: Նկար 34-ում չերևացող է միայն AC կողը, իսկ նկար 35-ում չերևացող են EK, KF և KL կողերը:

Նկ. 35

(13) Զուգահեռանիստ

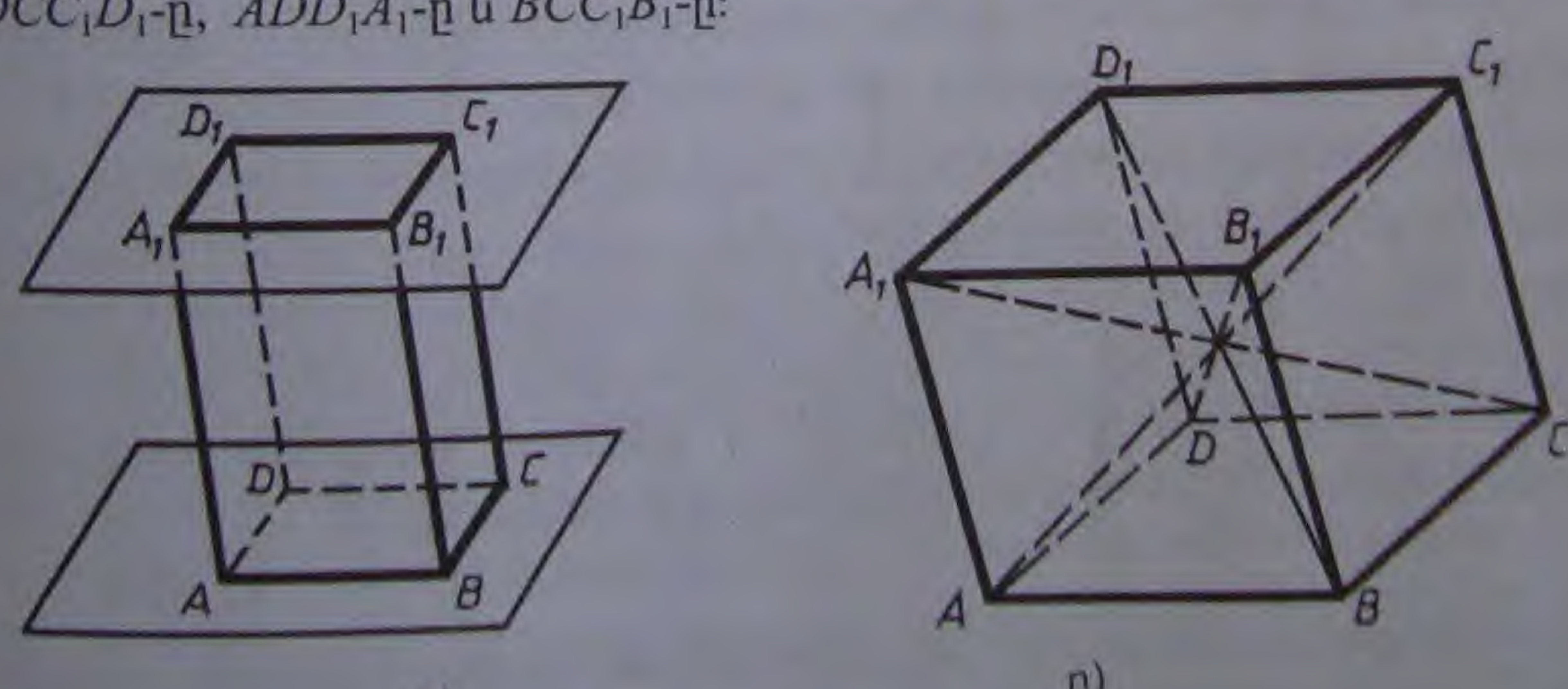
Դիտարկենք երկու հավասար զուգահեռագծեր՝ $ABCD$-ն և $A_1B_1C_1D_1$-ը, որոնք դասավորված են զուգահեռ հարթությունների մեջ այնպես, որ AA_1, BB_1, CC_1 և DD_1 հատվածները զուգահեռ են (նկ.36,ա):

$$ABB_1A_1,\ BCC_1B_1,\ CDD_1C_1,\ DAA_1D_1 \qquad (1)$$

քառանկյունները ևս զուգահեռագծեր են, քանի որ նրանցից յուրաքանչյուրի հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են (օրինակ՝ ABB_1A_1 քառանկյան AA_1 և BB_1 կողմերը զուգահեռ են՝ ըստ պայմանի, իսկ AB և A_1B_1 կողմերը՝ ըստ երկու զուգահեռ հարթությունները երրորդով հատելիս առաջացած հատման գծերի հատկության (կետ 11-ի 1° հատկություն): Այն մակերևույթը, որը կազմված է երկու՝ $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ հավասար զուգահեռագծերից և (1) չորս զուգահեռագծերից, կոչվում է **զուգահեռանիստ.** այն նշանակվում է այսպես. $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

Զուգահեռանիստ կազմող զուգահեռագծերը կոչվում են **զուգահեռանիստի նիստեր,** դրանց կողմերը՝ զուգահեռանիստի **կողեր,** իսկ գագաթները՝ **զուգահեռանիստի գագաթներ**: Զուգահեռանիստն ունի վեց նիստ, տասներկու կող և ութ գագաթ:

Զուգահեռանիստի երկու նիստերը, որոնք ունեն ընդհանուր կող, կոչվում են **կից,** իսկ ընդհանուր կող չունեցող նիստերը՝ **հանդիպակաց**: Նկար 36,բ-ում հանդիպակաց նիստեր են $ABCD$-ն և $A_1B_1C_1D_1$-ը, ABB_1A_1-ը և DCC_1D_1-ը, ADD_1A_1-ը և BCC_1B_1-ը:



Զուգահեռանիստ

Նկ. 36

Մի նիստի չպատկանող երկու գագաթները կոչվում են **հանդիպակաց**: Հանդիպակաց գագաթները միացնող հատվածը կոչվում է **զուգահեռանիստի անկյունագիծ**: Յուրաքանչյուր զուգահեռանիստ ունի չորս անկյունագիծ: 36,բ նկարում պատկերված զուգահեռանիստի անկյունագծերն են AC_1, BD_1, CA_1 և DB_1 հատվածները:

Հաճախ զուգահեռանիստի հանդիպակաց նիստերից որևէ երկուսն առանձնացնում են և դրանք անվանում զուգահեռանիստի **հիմքեր**, իսկ մյուս նիստերը՝ զուգահեռանիստի **կողմնային նիստեր**: Զուգահեռանիստի հիմքերին չպատկանող կողերը կոչվում են **կողմնային կողեր**: Այսպես, եթե որպես հիմքեր են ընտրված $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ նիստերը, ապա կողմնային նիստեր են (1) զուգահեռագծերը, իսկ կողմնային կողեր՝ AA_1, BB_1, CC_1 և DD_1 հատվածները:

Զուգահեռանիստը, սովորաբար, պատկերում են այնպես, ինչպես ցույց է տրված 36,բ նկարում: Դրանցում նիստերը պատկերում են զուգահեռագծի տեսքով, չերևացող կողերը և մյուս չերևացող հատվածները (օրինակ՝ անկյունագծերը) պատկերում են ընդհատ գծերով*:

Քննության առնենք զուգահեռանիստի երկու հատկություն:

1°. *Զուգահեռանիստի հանդիպակաց նիստերը զուգահեռ են և հավասար:***

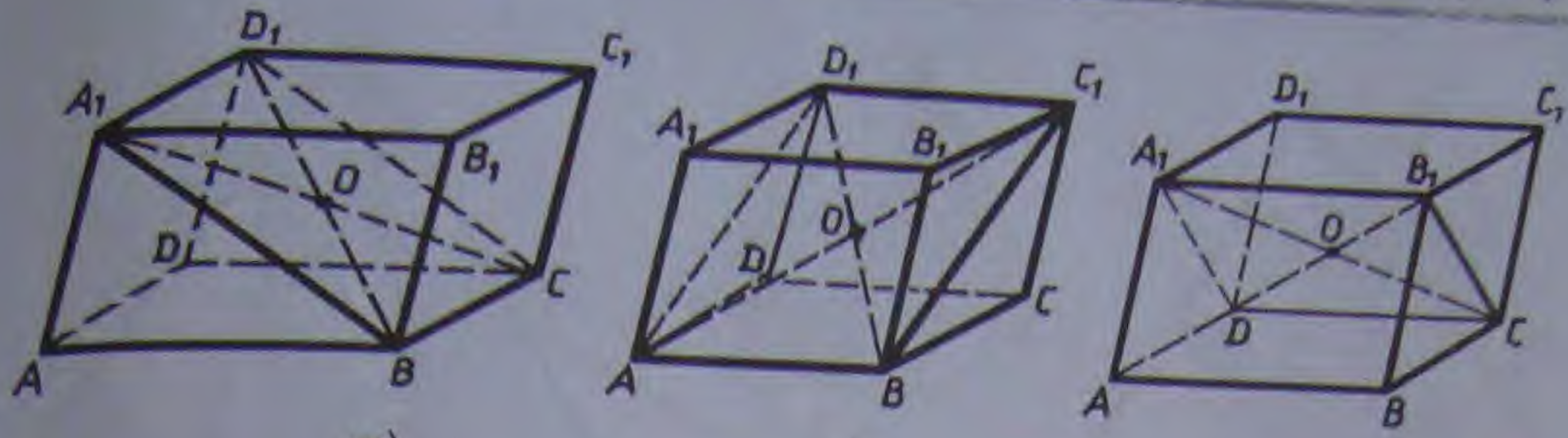
Ապացուցենք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի, օրինակ, ABB_1A_1 և DCC_1D_1 նիստերի զուգահեռությունն ու հավասարությունը (նկ.37,ա): Քանի որ $ABCD$-ն և ADD_1A_1-ը զուգահեռագծեր են, ապա $AB \parallel DC$ և $AA_1 \parallel DD_1$: Այսպիսով՝ նիստերից մեկի երկու հատվող ուղիղները՝ AB-ն և AA_1-ը, համապատասխանաբար զուգահեռ են մյուս նիստի երկու հատվող ուղիղներին՝ CD-ին և DD_1-ին: Ըստ հարթությունների զուգահեռության հայտանիշի՝ դրանից հետևում է, որ ABB_1A_1 և DCC_1D_1 նիստերը զուգահեռ են:

Այժմ ապացուցենք այդ նիստերի հավասարությունը: Քանի որ զուգահեռանիստի բոլոր նիստերը զուգահեռագծեր են, ուրեմն՝ $AB=DC$ և $AA_1=DD_1$: Այդ նույն պատճառով՝ A_1AB և D_1DC անկյունների կողմերը, համապատասխանաբար, համուղղված են և, ուրեմն, այդ անկյունները հավասար են: Այսպիսով՝ ABB_1A_1 զուգահեռագծի երկու կից կողմերը և դրանցով կազմված անկյունը համապատասխանաբար հավասար են DCC_1D_1 զուգահեռագծի երկու կից կողմերին ու դրանցով կազմված անկյանը: Դրանից հետևում է, որ այդ զուգահեռագծերը հավասար են:

---

* Տարածական պատկերների, մասնավորապես զուգահեռանիստի, հարթության վրա գծապատկերման մասին ավելի հանգամանորեն նկարագրված է դասագրքի հավելվածում:

** Երկու նիստեր կոչվում են զուգահեռ, եթե նրանց հարթությունները զուգահեռ են:



ա) բ) գ)

Նկ. 37

2^0. ***Զուգահեռանիստի անկյունագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով կիսվում են:***

Որպեսզի ապացուցենք այս հատկությունը՝ դիտարկենք A_1D_1CB քառանկյունը, որի A_1C և D_1B անկյունագծերը նաև $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի անկյունագծեր են (նկ.37,ա): Քանի որ $A_1D_1 \parallel BC$ և $A_1D_1=BC$ (պարզաբանեք, թե ինչու), ապա A_1D_1CB-ն զուգահեռագիծ է: Ուրեմն A_1C և D_1B անկյունագծերը հատվում են ինչ-որ O կետում և այդ կետով կիսվում են:

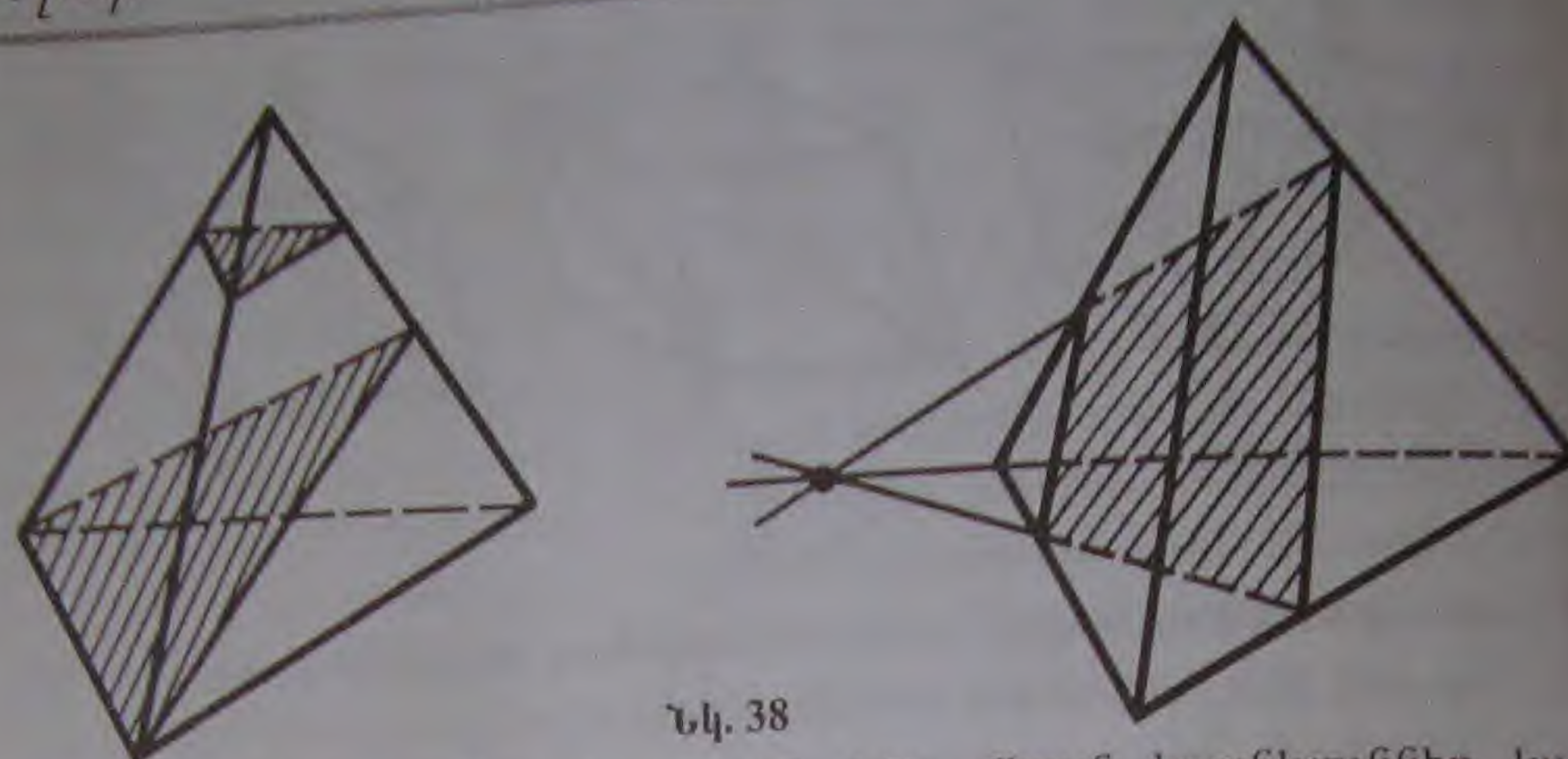
Այնուհետև դիտարկենք AD_1C_1B քառանկյունը (նկ.37,բ): Համանման ձևով ապացուցվում է, որ այն նույնպես զուգահեռագիծ է (ապացուցեք դա), և, հետևաբար, նրա AC_1 և D_1B անկյունագծերը հատվում և հատման կետով կիսվում են: Բայց D_1B անկյունագծի միջնակետը O կետն է, ուրեմն, O կետը նաև AC_1 անկյունագծի միջնակետն է:

Այսպիսով A_1C, D_1B և AC_1 անկյունագծերը հատվում են O կետում և այդ կետով կիսվում են:

Վերջապես, դիտարկելով A_1B_1CD քառանկյունը (նկ.37,գ), նույն կերպ հաստատվում է, որ զուգահեռանիստի չորրորդ անկյունագիծը՝ DB_1-ը, անցնում է նույն O կետով և նրանով կիսվում է:

14 Հատույթների կառուցման խնդիրներ

Քառանիստի և զուգահեռանիստի հետ կապված՝ երկրաչափական խնդիրներից շատերի լուծման համար օգտակար է, որ կարողանանք նկարի վրա կառուցել դրանց **հատույթները** տարբեր հարթություններով: Հստակեցնենք, թե ինչ հասկանալ՝ ասելով քառանիստի կամ զուգահեռանիստի **հատող հարթություն** կամ հատույթ: Քառանիստի (զուգահեռանիստի) **հատող հարթություն** կանվանենք ամեն մի հարթություն, որի երկու կողմերում էլ առկա են տվյալ քառանիստի (զուգահեռանիստի) կետերը: Հատող հարթությունը քառանիստի (զուգահեռանիստի) նիստերը հատում է հատվածներով (որևէ նիստի հետ կարող է և ունենալ, մասնավորապես, ընդհանուր կետ): Այն բազմանկյունը, որի կողմերն այդպիսի հատվածներն են, կոչվում է քառանիստի (զուգահեռանիստի) **հատույթ**: Քանի որ քառանիստն ունի չորս նիստ,

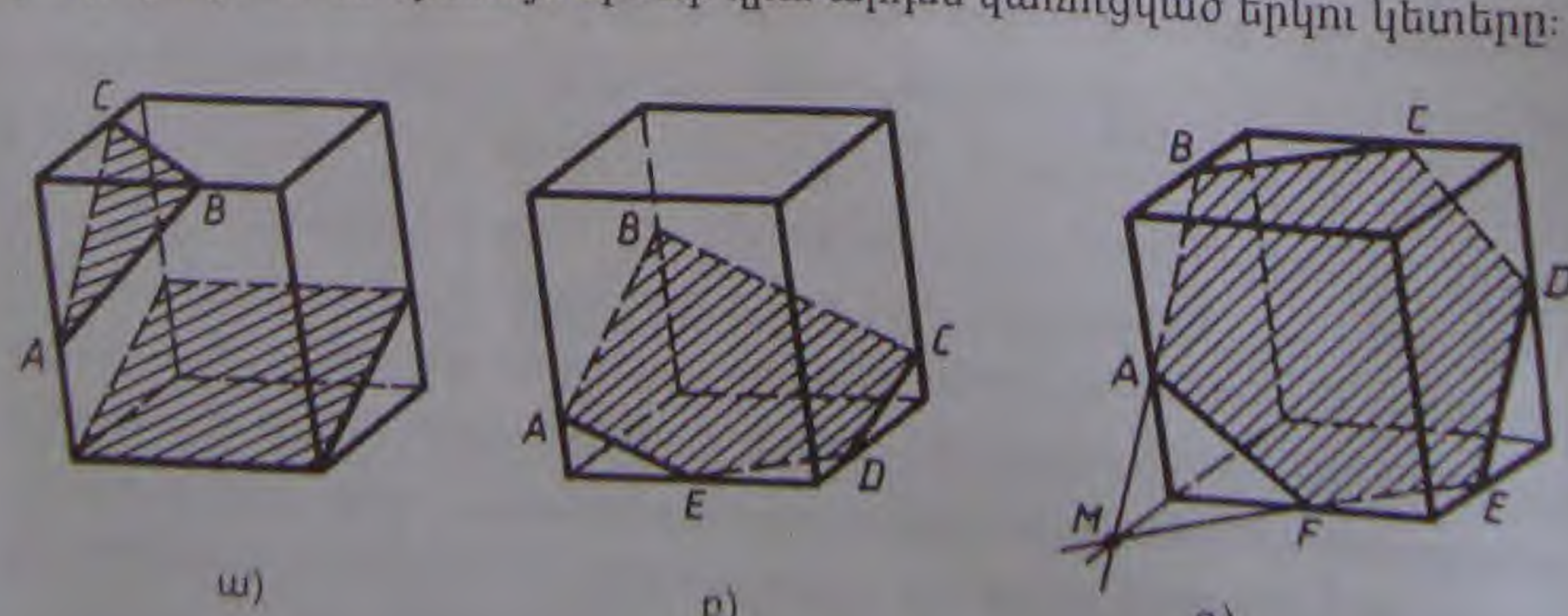


Նկ. 38

ապա նրա հատույթները կարող են լինել միայն եռանկյուններ կամ քառանկյուններ (նկ.38)։ Զուգահեռանիստն ունի վեց նիստ. նրա հատույթները կարող են լինել եռանկյուններ, քառանկյուններ (նկ.39,ա), հնգանկյուններ (նկ.39,բ) կամ վեցանկյուններ (նկ.39,գ)։

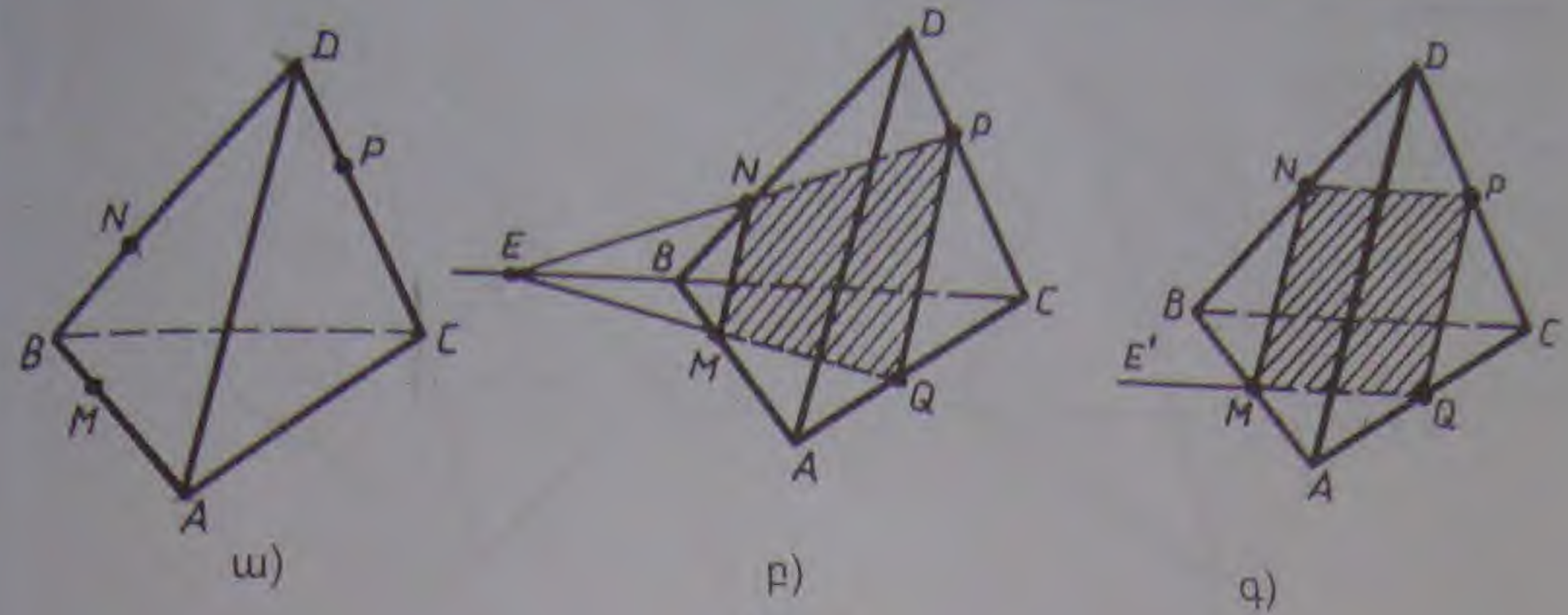
Նկարի վրա զուգահեռանիստի հատույթներ կառուցելիս հարկավոր է նկատի ունենալ այն փաստը, որ եթե հատող հարթությունը հատում է երկու հանդիպակաց նիստեր ինչ-որ հատվածներով, ապա այդ հատվածները զուգահեռ են (կետ 11-ի հատկություն 1^0)։ Այսպես, օրինակ, 39,բ նկարում հատող հարթությունը հանդիպակաց նիստերից երկուսը (ձախը և աջը) հատում է AB և CD հատվածներով, իսկ մյուս երկու (առջևի և հետևի) հանդիպակաց նիստերը՝ AE և BC հատվածներով։ Ուրեմն՝ $AB \parallel CD$ և $AE \parallel BC$ ։ Նույն պատճառով էլ 39,գ նկարում $AB \parallel ED$, $AF \parallel CD$, $BC \parallel EF$ ։

Ավելացնենք, որ հատույթը կառուցելու համար կարևոր է կառուցել այն կետերը, որոնցով հատող հարթությունը հատում է քառանիստի (զուգահեռանիստի) կողերը։ Դրանից հետո մնում է տանել բոլոր այն հատվածները, որոնք միացնում են միևնույն նիստի վրա արդեն կառուցված երկու կետերը։



ա) բ) գ)

Նկ. 39



Նկ. 40

Դիտարկենք քառանիստի և զուգահեռանիստի տարբեր հատույթների կառուցման օրինակներ:

Խնդիր 1

ABCD քառանիստի AB, BD և CD կողերի վրա նշված են M, N և P կետերը (նկ.40,ա): Կառուցել քառանիստի հատույթը MNP հարթությամբ:

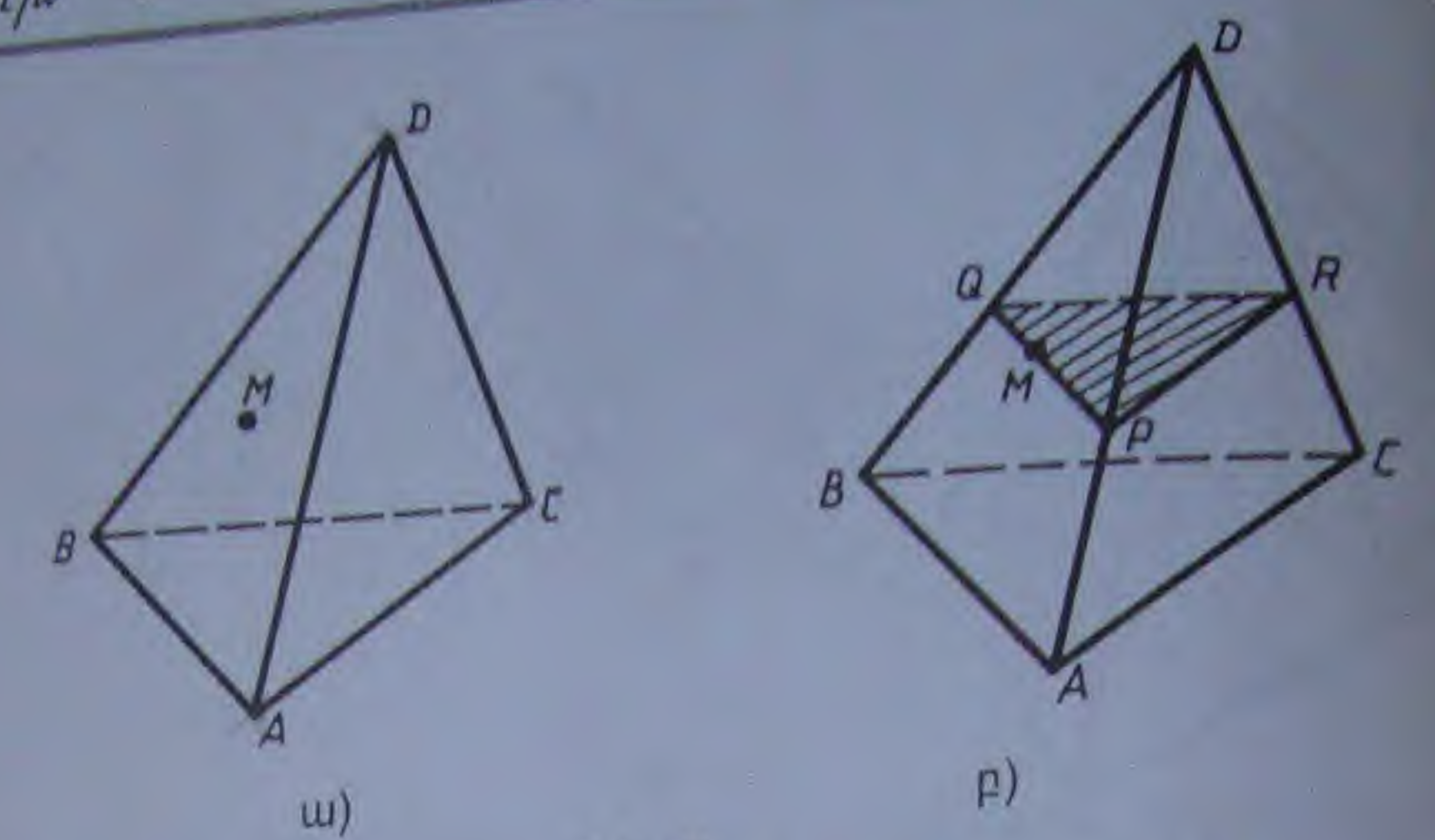
Լուծում: Նախ կառուցենք այն ուղիղը, որով MNP հարթությունը հատվում է ABC նիստի հարթությանը: M կետը այդ երկու հարթությունների ընդհանուր կետ է: Եվս մեկ ընդհանուր կետ կառուցելու համար շարունակենք NP և BC հատվածները՝ մինչև նրանց հատվելը որևէ E կետում (նկ.40,բ): Այդ կետն էլ կլինի MNP և ABC հարթությունների երկրորդ ընդհանուր կետը: Ուրեմն՝ այդ հարթությունները հատվում են ME ուղղով: ME ուղիղը մի որևէ Q կետում հատում է AC կողը: Որոնելի հատույթը $MNPQ$ քառանկյունն է:

Եթե NP և BC ուղիղները զուգահեռ են (նկ.40,գ), ապա NP ուղիղը զուգահեռ է ABC նիստին: Ուրեմն՝ MNP հարթությունը այդ նիստը հատում է NP ուղղին զուգահեռ ME' ուղղով: Q կետը, ինչպես և նախորդ դեպքում, AC կողի և ME' ուղղի հատման կետն է:

Խնդիր 2

M կետն ընկած է DABC քառանիստի ADB կողմնային նիստի վրա (նկ.41,ա): Կառուցել քառանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է M կետով և զուգահեռ է ABC հիմքին:

Լուծում: Քանի որ հատող հարթությունը զուգահեռ է ABC հարթությանը, ապա այն զուգահեռ է AB, BC և CA ուղիղներին: Հետևաբար՝ հատող հարթությունը քառանիստի կողմնային նիստերը հատում է ուղիղներով, որոնք զուգահեռ են ABC եռանկյան կողմերին (կետ 6-ի 1° պնդումը): Դրանից բխում է որոնելի հատույթի կառուցման հետևյալ եղանակը: M



Նկ. 41

կետով տանենք ուղիղ՝ զուգահեռ AB հատվածին, և P ու Q տառերով նշանակենք այն կետերը, որոնցում այդ ուղիղը հատում է DA և DB կողմնային կողերը (նկ.41,բ): Այնուհետև P կետով տանենք ուղիղ՝ զուգահեռ AC հատվածին, և R տառով նշանակենք տվյալ ուղղի և DC կողի հատման կետը: Ստացվում է PQR եռանկյունը. այն որոնելի հատույթն է:

Խ ն դ ի ր 3

Զուգահեռանիստի կողերի վրա տրված են երեք կետեր՝ A-ն, B-ն, C-ն: Կառուցել զուգահեռանիստի հատույթը ABC հարթությամբ:

Լ ու ծ ու մ : Որոնելի հատույթի կառուցումը կախված է այն բանից, թե զուգահեռանիստի կողերից որոնց վրա են ընկած A, B և C կետերը: Հնարավոր են տարբեր դեպքեր, և մենք կդիտարկենք դրանցից մի քանիսը (դրանց օգնությամբ դուք կարող եք դիտարկել նաև մյուս դեպքերը): Պարզագույն դեպքում, երբ այդ կետերն ընկած են մի գագաթից ելնող կողերի վրա (տե՛ս նկ.39,ա), հարկավոր է տանել AB, BC, CA հատվածները, և կստացվի որոնելի հատույթը. այն ABC եռանկյունն է:

Եթե տրված A, B, C երեք կետերը դասավորված են այնպես, ինչպես ցույց է տրված 39,բ նկարում, ապա նախ պետք է տանել AB և BC հատվածները, հետո A կետով տանել ուղիղ՝ զուգահեռ BC-ին, և C կետով ուղիղ՝ զուգահեռ AB-ին (պարզաբանենք, թե ինչպես տանել այդ ուղիղները): Այդ ուղիղները հատվելով ստորին նիստի կողերին՝ հայտնի են դառնում E և D կետերը: Մնում է տանել ED հատվածը, և կստացվի $ABCDE$ հնգանկյունը. այն որոնելի հատույթն է:

Ավելի բարդ է այն դեպքը, երբ տրված A, B, C երեք կետերը դասավորված են այնպես, ինչպես ցույց է տրված 39,գ նկարում: Այս դեպքում կարելի է վարվել հետևյալ կերպ: Նախ կառուցենք այն ուղիղը, որով հատվում են հատող հարթությունը և ստորին հիմքի հարթությունը: Դրա համար տանենք AB ուղիղը, իսկ AB-ի հետ նույն նիստի վրա ընկած

ստորին կողը շարունակենք՝ մինչև այդ ուղղի հետ M կետում հատվելը: Այնուհետև հատման M կետով տանենք ուղիղ՝ զուգահեռ BC ուղղին: Դա հենց այն ուղիղն է, որով հատվում են հատող հարթությունը և ստորին հիմքի հարթությունը: Այդ ուղիղը ստորին հիմքի կողերին կհատվի E և F կետերում: Դրանից հետո E կետով տանելով AB-ին զուգահեռ ուղիղ կստանանք D կետը: Վերջապես, տանենք AF և CD հատվածները: Կստացվի $ABCDEF$ վեցանկյունը, և այն որոնելի հատույթն է:

Խնդիրներ

66. Անվանեք $ABCD$ քառանիստի բոլոր խաչվող (այսինքն՝ խաչվող ուղիղների վրա ընկած) կողերի զույգերը: Այդպիսի քանի՞ զույգ կողեր ունի քառանիստը:

67. $DABC$ քառանիստում տրված են. $\angle ADB=54°$, $\angle BDC=72°$, $\angle CDA=90°$, $DA=20$սմ, $BD=18$սմ, $DC=21$սմ: Գտեք. **ա)** այդ քառանիստի ABC հիմքի կողերը, **բ)** բոլոր կողմնային նիստերի մակերեսները:

68. $ABCD$ քառանիստի AB և AC կողերի միջնակետերը M և N կետերն են: Ապացուցեք, որ MN ուղիղը զուգահեռ է BCD հարթությանը:

69. $SABC$ քառանիստի AB և BC կողերի միջնակետերով տարված է SB կողին զուգահեռ հարթություն: Ապացուցեք, որ այդ հարթությունը SAB և SCB նիստերը հատում է զուգահեռ ուղիղներով:

70. Ապացուցեք, որ $ABCD$ քառանիստի AB, AC և AD կողերի միջնակետերով անցնող հարթությունը զուգահեռ է BCD հարթությանը:

71. Պատկերեք $DABC$ քառանիստ և նրա DB, DC, BC կողերի վրա նշեք, համապատասխանաբար, M, N, K կետեր: Կառուցեք՝ **ա)** MN ուղղի և ABC հարթության հատման կետը, **բ)** KN ուղղի և ABD հարթության հատման կետը:

72. Պատկերեք $DABC$ քառանիստ: Կառուցեք նրա հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է M կետով և զուգահեռ է ABC նիստին, եթե. **ա)** M կետը AD կողի միջնակետն է, **բ)** M կետը ABD նիստի ներքին կետ է:

73. $ABCD$ քառանիստում AB, BC,CD կողերի միջնակետերն են M-ը, N-ը, P-ն, և $AC=10$սմ, $BD=12$սմ: Ապացուցեք, որ MNP հարթությունն անցնում է AD կողի K միջնակետով, և գտեք այն քառանկյան պարագիծը, որն ստացվում է քառանիստը MNP հարթությամբ հատելիս:

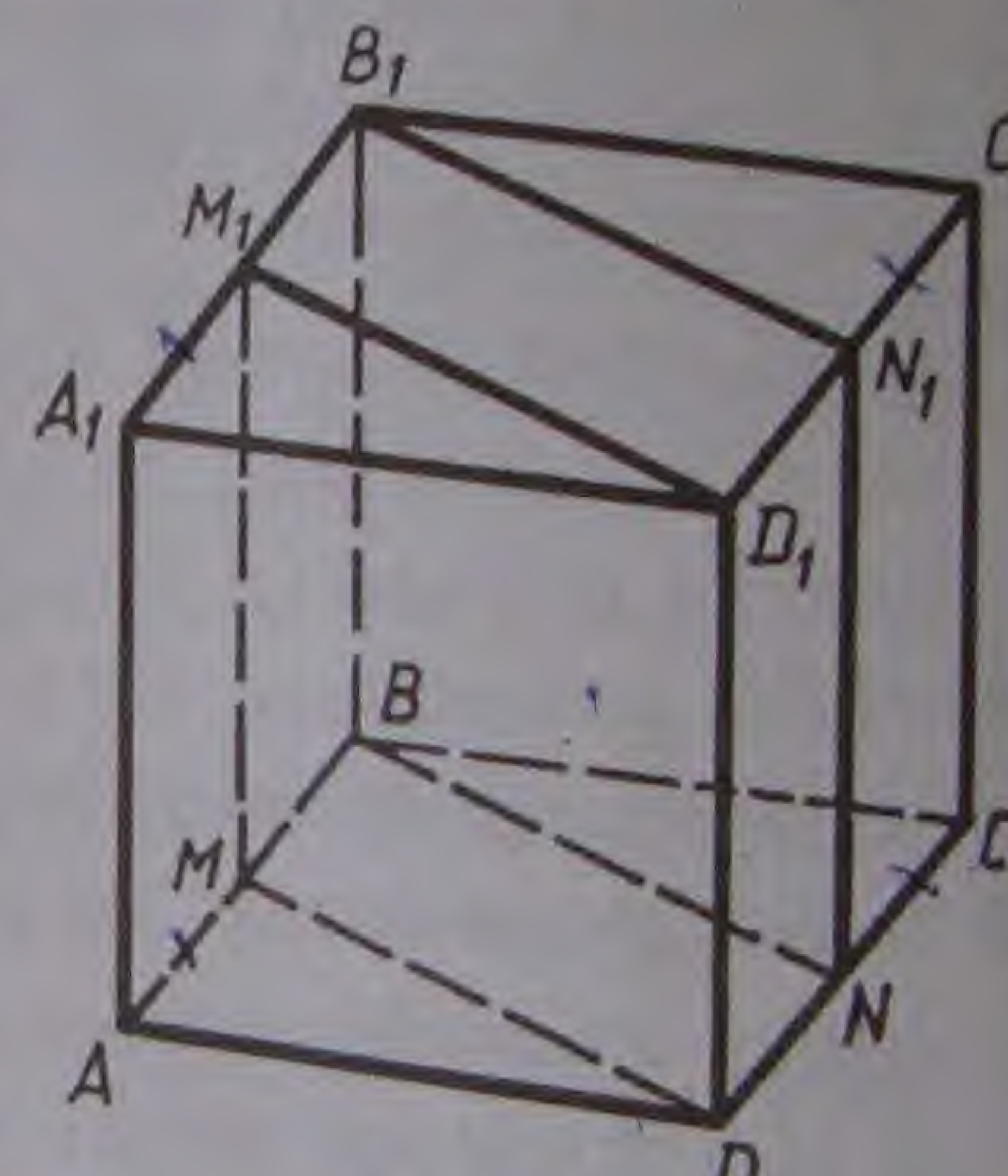
74. $ABCD$ քառանիստի BCD նիստի միջնագծերի հատման կետով տարված է ABC նիստին զուգահեռ հարթություն: **ա)** Ապացուցեք, որ քառանիստի այդ հարթությամբ հատույթը եռանկյուն է, որը նման է ABC եռանկյանը: **բ)** Գտեք այդ հատույթի և ABC եռանկյան մակերեսների հարաբերությունը:

75. Պատկերեք $KLMN$ քառանիստ։ **ա)** Կառուցեք այդ քառանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է KL կողով և MN կողի A միջնակետով։ **բ)** Ապացուցեք, որ LM, MA և MK հատվածների E, O և F միջնակետերով անցնող հարթությունը զուգահեռ է LKA հարթությանը։ Գտեք EOF եռանկյան մակերեսը, եթե LKA եռանկյան մակերեսը $24սմ^2$ է։

76. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը։ Ապացուցեք, որ $AC \parallel A_1C_1$ և $BD \parallel B_1D_1$ ։

77. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի բոլոր կողերի գումարը 120սմ է։ Գտեք զուգահեռանիստի կողերից յուրաքանչյուրը, եթե հայտնի է, որ $\frac{AB}{BC}=\frac{4}{5}$, $\frac{BC}{BB_1}=\frac{5}{6}$ ։

78. Նկար 42-ում պատկերված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը, որի կողերի վրա նշված են M, N, M_1 և N_1 կետերն այնպես, որ $AM=CN=A_1M_1=C_1N_1$։ Ապացուցեք, որ $MBNDM_1B_1N_1D_1$-ը զուգահեռանիստ է։



Նկ. 42

79. Պատկերեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստ, և կառուցեք նրա հատույթը. **ա)** ABC_1 հարթությամբ, **բ)** ACC_1 հարթությամբ։ Ապացուցեք, որ կառուցված հատույթները զուգահեռագծեր են։

80. Պատկերեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստ և կառուցեք նրա հատույթները ABC_1 և DCB_1 հարթություններով, ինչպես նաև այն հատվածը, որով հատվում են այդ հատույթները։

81. Պատկերեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստ և նրա BB_1 և CC_1 կողերի վրա նշեք, համապատասխանաբար, M և N կետեր։ Կառուցեք հատման կետը. **ա)** MN ուղղի և ABC հարթության, **բ)** AM ուղղի և $A_1B_1C_1$ հարթության։

82. Պատկերեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստ և նշեք AA_1B_1B նիստի M ներքին կետը։ Կառուցեք զուգահեռանիստի այն հատույթը, որն անցնում է M կետով և զուգահեռ է՝ **ա)** $ABCD$ հիմքի հարթությանը, **բ)** BB_1C_1C նիստին, **գ)** BDD_1 հարթությանը։

83. Պատկերեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստ և կառուցեք նրա հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է՝ **ա)** CC_1 կողով և AA_1D_1D նիստի անկյունագծերի հատման կետով, **բ)** $ABCD$ նիստի անկյունագծերի հատման կետով և զուգահեռ է AB_1C_1 հարթությանը։

84. Պատկերեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստ և կառուցեք նրա հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է B_1, D_1 կետերով և CD կողի միջնակետով: Ապացուցեք, որ կառուցված հատույթը սեղան է:

85. Պատկերեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստ և կառուցեք նրա հատույթը BKL հարթությամբ, որտեղ K-ն AA_1 կողի միջնակետն է, իսկ L-ը՝ CC_1 կողի միջնակետը: Ապացուցեք, որ կառուցված հատույթը զուգահեռագիծ է:

86. Պատկերեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստ և կառուցեք նրա հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է հիմքի AC անկյունագծով և զուգահեռ է BD_1 անկյունագծին: Ապացուցեք, որ եթե զուգահեռանիստի հիմքը շեղանկյուն է, իսկ ABB_1 և CBB_1 անկյունները ուղիղ անկյուն են, ապա կառուցված հատույթը հավասարասրուն եռանկյուն է:

87. Պատկերեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստ և կառուցեք նրա հատույթը MNK հարթությամբ, որտեղ M, N և K կետերն ընկած են, համապատասխանաբար՝ **ա)** BB_1, AA_1, AD, **բ)** CC_1, AD, BB_1 կողերի վրա:

Հարցեր գլուխ I-ի վերաբերյալ

1. Արդյոք ճշմարի՞տ է պնդումը. եթե երկու ուղիղներ չունեն ընդհանուր կետեր, ապա նրանք զուգահեռ են:
2. M կետն ընկած չէ a ուղղի վրա: Քանի՞ ուղիղ կա, որ չի հատվում a ուղղին և անցնում է M կետով: Այդ ուղիղներից քանի՞սն են զուգահեռ a ուղղին:
3. a և c ուղիղները զուգահեռ են, իսկ a և b ուղիղները հատվում են: b և c ուղիղները կարո՞ղ են, արդյոք, լինել զուգահեռ:
4. a ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը: Ճշմարի՞տ է, արդյոք, որ այդ ուղիղը՝ **ա)** չի հատում α հարթության մեջ ընկած ոչ մի ուղղի, **բ)** զուգահեռ է α հարթության մեջ ընկած ցանկացած ուղղի, **գ)** զուգահեռ է α հարթության մեջ ընկած որևէ ուղղի:
5. a ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը: α հարթության մեջ ընկած քանի՞ ուղիղներ են զուգահեռ a ուղղին: α հարթության մեջ ընկած այդ ուղիղները զուգահե՞ռ են, արդյոք, միմյանց:
6. a ուղիղը հատում է α հարթությունը: α հարթության մեջ կա՞, արդյոք, թեկուզ մեկ ուղիղ, որ զուգահեռ է a ուղղին:
7. Երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը զուգահեռ է ինչ-որ հարթության: Արդյոք ճշմարի՞տ է այն պնդումը, որ այդ հարթությանը զուգահեռ է նաև երկրորդ ուղիղը:
8. Արդյո՞ք ճշմարիտ է պնդումը. եթե երկու ուղիղներ զուգահեռ են ինչ-որ հարթության, ապա դրանք միմյանց զուգահեռ են:

9. Երկու ուղիղներ զուգահեռ են ինչ-որ հարթության: Այդ ուղիղները արդյոք կարո՞ղ են. **ա)** հատվել, **բ)** լինել խաչվող:

10. Կարո՞ղ են, արդյոք, a և b խաչվող ուղիղները զուգահեռ լինել c ուղղին:

11. Սեղանի սրունքները զուգահեռ են α հարթությանը: Արդյոք զուգահե՞ռ են α հարթությունը և այդ սեղանի հարթությունը:

12. Զուգահեռագծի երկու կողմերը զուգահեռ են α հարթությանը: Արդյոք զուգահե՞ռ են α հարթությունը և այդ զուգահեռագծի հարթությունը:

13. Կարո՞ղ են, արդյոք, հավասար լինել երկու ոչ զուգահեռ հատվածներ, որոնք առնված են զուգահեռ հարթությունների միջև:

14. Արդյոք գոյություն ունի՞ այնպիսի քառանիստ, որի նիստերի անկյուններից հինգը ուղիղ անկյուն են:

15. Արդյոք գոյություն ունի՞ այնպիսի զուգահեռանիստ, որի. **ա)** նիստերից միայն մեկն ուղղանկյուն է, **բ)** կից նիստերից միայն երկուսն են շեղանկյուն, **գ)** նիստերի բոլոր անկյունները սուր են, **դ)** նիստերի բոլոր անկյուններն ուղիղ են, **ե)** նիստերի բոլոր սուր անկյունների թիվը հավասար չէ բոլոր բութ անկյունների թվին:

16. Ինչպիսի՞ բազմանկյուններ կարող են լինել. **ա)** քառանիստի հատույթները, **բ)** զուգահեռանիստի հատույթները:

Լրացուցիչ խնդիրներ

88. AC և BD զուգահեռ ուղիղները A և B կետերում հատում են α հարթությունը: C և D կետերն ընկած են α հարթության միևնույն կողմում, AC=8սմ, BD=6սմ, AB=4սմ: **ա)** Ապացուցեք, որ CD ուղիղը որևէ E կետում հատում է α հարթությունը: **բ)** Գտեք BE հատվածը:

89. A, B, C և D կետերն ընկած չեն մի հարթության մեջ: ABC և CBD եռանկյունների միջնագծերը հատվում են, համապատասխանաբար, M_1 և M_2 կետերում: Ապացուցեք, որ AD և M_1M_2 հատվածները զուգահեռ են:

90. $ABCD$ սեղանի A և B գագաթներն ընկած են α հարթության մեջ, իսկ C և D գագաթներն այդ հարթության մեջ չեն ընկած: α հարթության նկատմամբ ինչպե՞ս է դասավորված CD ուղիղը, եթե AB հատվածը **ա)** սեղանի հիմքն է, **բ)** սեղանի սրունքն է:

91. a և b զուգահեռ ուղիղներից յուրաքանչյուրով և այդ ուղիղների հարթության մեջ չընկած M կետով տարված է հարթություն: Ապացուցեք, որ այդ հարթությունները հատվում են ուղղով, որը զուգահեռ է a և b ուղիղներին:

92. α հարթությունը և a ուղիղը զուգահեռ են b ուղղին: Ապացուցեք, որ a ուղիղը կա՛մ զուգահեռ է α հարթությանը, կա՛մ ընկած է նրա մեջ:

93. ***a*** և ***b*** ուղիղները զուգահեռ են: ***a*** ուղղի M կետով տարված է ***a*** ուղղից տարբեր այնպիսի MN ուղիղ, որ չի հատում ***b*** ուղիղը: Ինչպիսի՞ն է MN և ***b*** ուղիղների փոխադարձ դասավորությունը:

94. Տրված են երկու խաչվող ուղիղներ և B կետը, որն ընկած չէ այդ ուղիղների վրա: Արդյոք հատվու՞մ են այն հարթությունները, որոնցից յուրաքանչյուրն անցնում է ուղիղներից մեկով և B կետով: Պատասխանը հիմնավորեք:

95. ***a*** ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը: Ապացուցեք, որ եթե β հարթությունը հատում է ***a*** ուղիղը, ապա հատում է նաև α հարթությունը:

96. Ապացուցեք, որ զուգահեռ ուղիղների այն հատվածները, որոնք առնված են հարթության և նրան զուգահեռ ուղղի միջև, հավասար են:

97. Ապացուցեք, որ համապատասխանաբար զուգահեռ կողմերով երկու անկյունները կա՛մ հավասար են, կա՛մ նրանց գումարը $180°$ է:

98. ***a*** ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը: Արդյոք գոյություն ունի՞ ***a*** ուղղով անցնող և α հարթությանը զուգահեռ հարթություն: Եթե այո, ապա քանի՞ այդպիսի հարթություն գոյություն ունի: Պատասխանը հիմնավորեք:

99. Ապացուցեք, որ երեք զուգահեռ հարթություններ իրենց հատող ցանկացած երկու ուղիղներից անջատում են համեմատական հատվածներ:

100. Տրված են երկու խաչվող ուղիղներ և A կետը: Ապացուցեք, որ A կետով անցնում է, ընդ որում միայն մեկ հարթություն, որը կա՛մ զուգահեռ է տրված ուղիղներին, կա՛մ անցնում է դրանցից մեկով և զուգահեռ է մյուսին:

101. Ապացուցեք, որ քառանիստի հանդիպակաց կողերի միջնակետերը միացնող հատվածները հատվում են և հատման կետով կիսվում են:

102. Ապացուցեք, որ քառանիստի հիմքի երկու կողերի միջնակետերով և հիմքին չպատկանող գագաթով անցնող α հարթությունը զուգահեռ է հիմքի երրորդ կողին: Գտեք քառանիստի՝ α հարթությամբ հատույթի պարագիծը և մակերեսը, եթե քառանիստի յուրաքանչյուր կողի երկարությունը 20սմ է:

103. $DABC$ քառանիստի DA, DB և DC կողերի վրա M, N և P կետերը նշված են այնպես, որ $DM:MA=DN:NB=DP:PC$: Ապացուցեք, որ MNP և ABC հարթությունները զուգահեռ են: Գտեք MNP եռանկյան մակերեսը, եթե ABC եռանկյան մակերեսը $10սմ^2$ է, և $DM:MA=2:1$:

104. Պատկերեք $ABCD$ քառանիստ և AB կողի վրա նշեք M կետ: Կառուցեք քառանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է M կետով և զուգահեռ է AC և BD ուղիղներին:

105. Պատկերեք $DABC$ քառանիստ, նշեք M և N կետերը BD և CD կողերի վրա, իսկ K ներքին կետը՝ ABC նիստի մեջ: Կառուցեք քառանիստի հատույթը MNK հարթությամբ:

106. Պատկերեք $DABC$ քառանիստ, նշեք K կետը DC կողի վրա, իսկ M և N կետերը՝ ABC և ACD նիստերի վրա: Կառուցեք քառանիստի հատույթը MNK հարթությամբ:

107. Պատկերեք $ABCD$ քառանիստ և AB կողի վրա նշեք M կետը: Կառուցեք քառանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է M կետով և զուգահեռ է BDC նիստին:

108*. $DABC$ քառանիստի մեջ D գագաթով երեք անկյունների կիսորդները հատում են BC, CA և AB հատվածները, համապատասխանաբար, A_1, B_1 և C_1 կետերում: Ապացուցեք, որ AA_1, BB_1 և CC_1 հատվածները հատվում են մի կետում:

109. a ուղղով հատվում են երկու հարթություններ, որոնցից յուրաքանչյուրն ընդգրկում է զուգահեռանիստի՝ մի նիստի չպատկանող երկու կողմնային կողեր: Ապացուցեք, որ a ուղիղը զուգահեռ է զուգահեռանիստի կողմնային կողերին և հատում է նրա բոլոր անկյունագծերը:

110. Ապացուցեք, որ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստում A_1DB հարթությունը զուգահեռ է D_1CB_1 հարթությանը:

111. Ապացուցեք, որ զուգահեռանիստի անկյունագիծը փոքր է ընդհանուր գագաթ ունեցող երեք կողերի գումարից:

112. Ապացուցեք, որ զուգահեռանիստի չորս անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է նրա տասներկու կողերի քառակուսիների գումարին:

113. Ո՞ր ուղղով են հատվում $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի A_1BCD_1 և BDD_1B_1 հատույթների հարթությունները:

114. Պատկերեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստ և AB կողի վրա նշեք M կետը: Կառուցեք զուգահեռանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է M կետով և զուգահեռ է ACC_1 հարթությանը:

115. M կետն ընկած է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի BC կողի վրա: Կառուցեք այդ զուգահեռանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է M կետով և զուգահեռ է BDC_1 հարթությանը:

ԳԼՈՒԽ II

ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

§ 1 Ուղղի և հարթության ուղղահայացությունը

Ե /

15 Ուղղահայաց ուղիղները տարածության մեջ

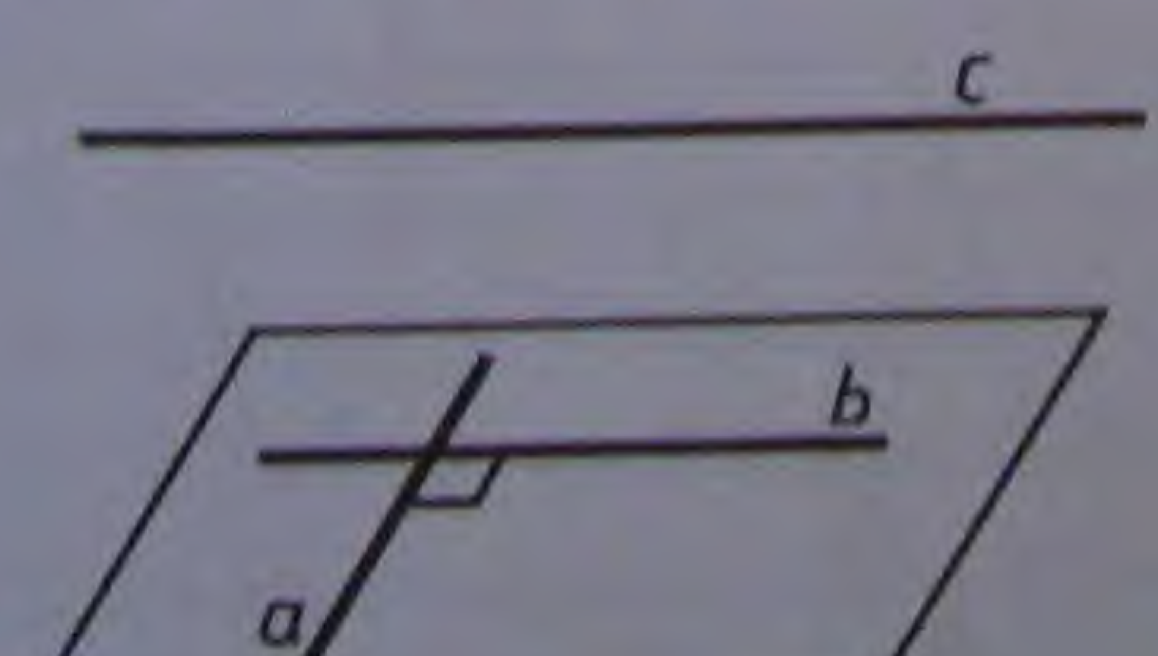
Տարածության մեջ երկու ուղիղներ կոչվում են **ուղղահայաց** (փոխուղղահայաց), եթե նրանց կազմած անկյունը 90^0 է: a և b ուղիղների ուղղահայացությունը նշանակվում է այսպես՝ $a \perp b$: Ուղղահայաց ուղիղները կարող են հատվել, կարող են լինել խաչվող: Նկար 43-ում a և b ուղղահայաց ուղիղները հատվում են, իսկ a և c ուղղահայաց ուղիղները խաչվող են:

Ապացուցենք լեմմ՝ երկու զուգահեռ ուղիղների՝ երրորդ ուղղին ուղղահայացության մասին:

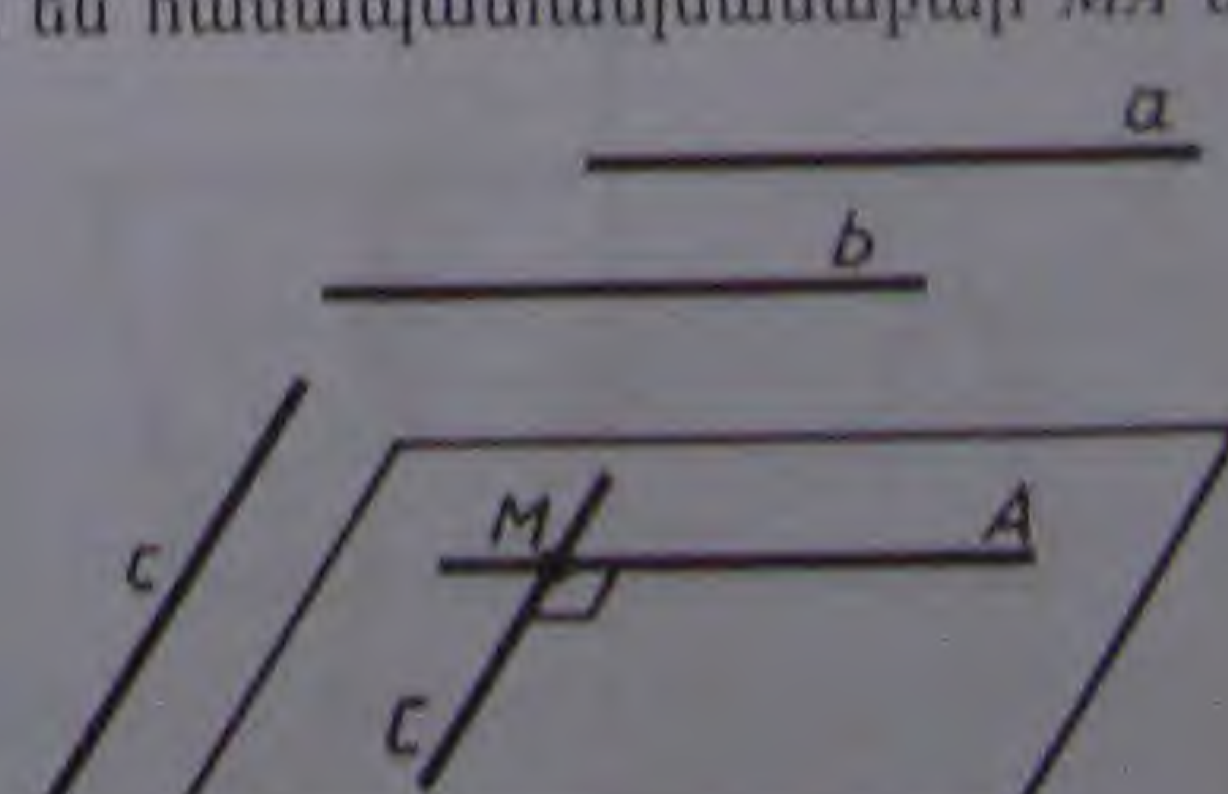
Լեմմ: ***Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկն ուղղահայաց է երրորդ ուղղին, ապա մյուս ուղիղը ևս ուղղահայաց է այդ ուղղին:***

Ապացուցում: Դիցուք՝ $a \| b$ և $a \perp c$: Ապացուցեք, որ $b \perp c$: Տարածության կամայական M կետով, որն ընկած չէ տրված ուղիղների վրա, տանենք a և c ուղիղներին զուգահեռ, համապատասխանաբար, MA և MC ուղիղները (նկ. 44): Քանի որ $a \perp c$, ապա $\angle AMC=90^0$:

Ըստ պայմանի՝ $b \| a$, իսկ ըստ կառուցման՝ $a \| MA$, ուրեմն՝ $b \| MA$: Այսպիսով՝ b և c ուղիղները զուգահեռ են համապատասխանաբար MA և



Նկ. 43



Նկ. 44

MC ուղիղներին, որոնց կազմած անկյունը 90^0 է: Դա նշանակում է, որ b և c ուղիղների կազմած անկյունը նույնպես 90^0 է, այսինքն՝ $b \perp c$: Լեմմը ապացուցված է:

(16) Զուգահեռ ուղիղներ՝ հարթությանն ուղղահայաց

Սահմանում: ***Ուղիղը կոչվում է հարթությանն ուղղահայաց, եթե այն ուղղահայաց է այդ հարթության մեջ ընկած ցանկացած ուղղին:***

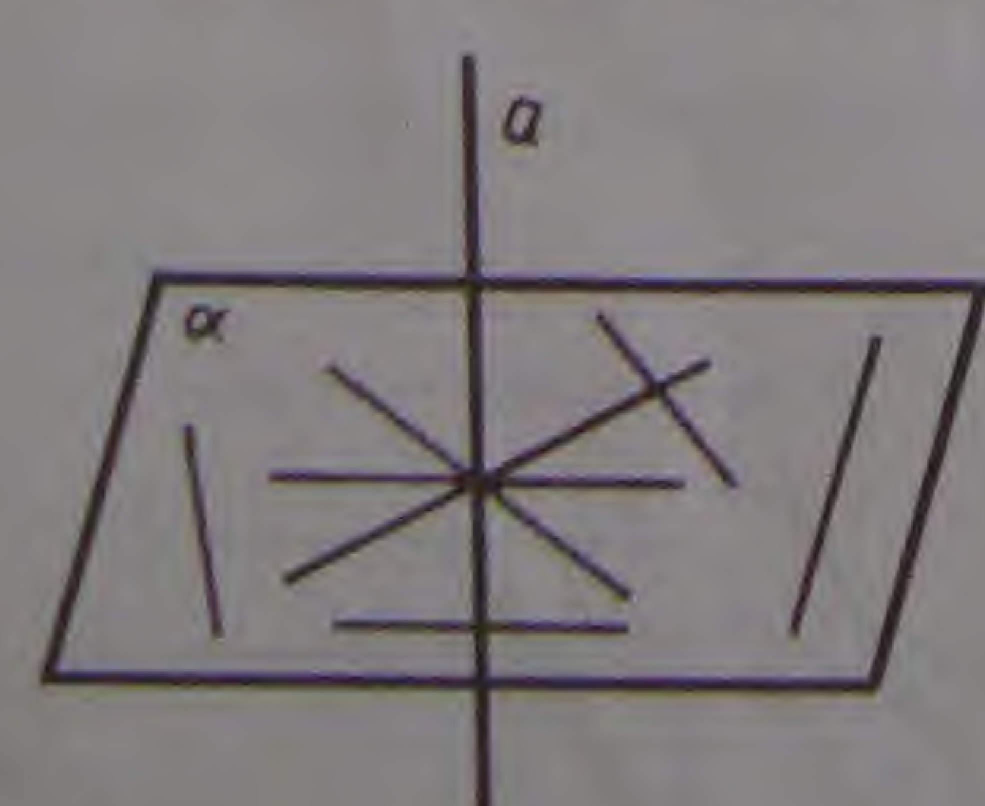
a ուղղի և α հարթության ուղղահայացությունը նշանակվում է այսպես՝ $a \perp \alpha$: Ասում են նաև, որ **α հարթությունն ուղղահայաց է a ուղղին:**

Եթե a ուղիղն ուղղահայաց է α հարթությանը, ապա այն հատում է այդ հարթությունը: Բանն այն է, որ եթե a ուղիղը չհատեր α հարթությունը, ապա այն կա՛մ ընկած կլիներ այդ հարթության մեջ, կամ էլ կլիներ նրան զուգահեռ: Բայց այդ դեպքում α հարթության մեջ կլինեին ուղիղներ, որոնք ուղղահայաց չեն a ուղղին, ինչպես օրինակ՝ a-ին զուգահեռ ուղիղները: Իսկ դա կհակասեր ուղղի և հարթության ուղղահայացության սահմանմանը: Ուրեմն՝ a ուղիղը հատում է α հարթությունը:

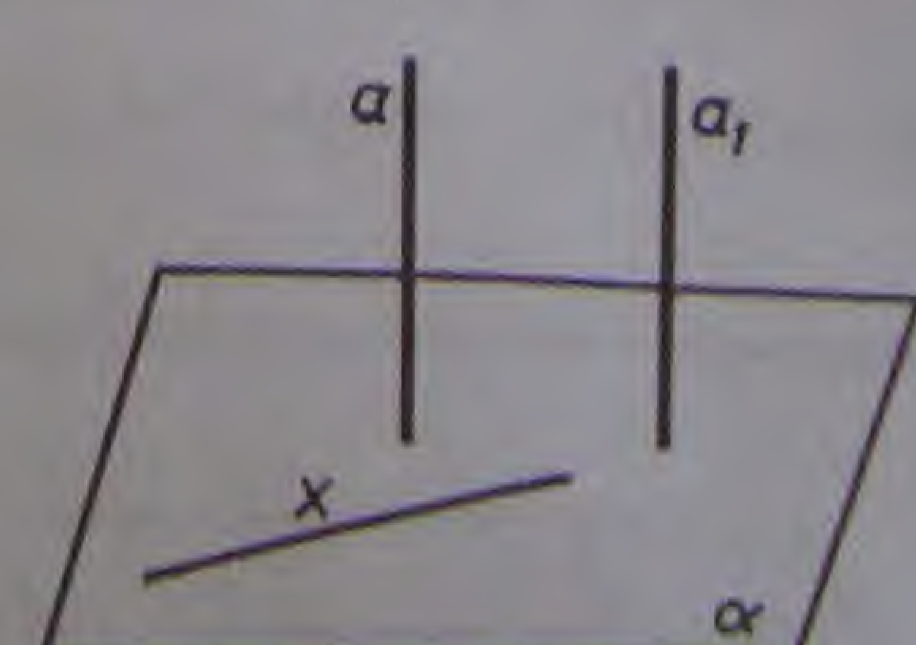
Նկար 45-ում պատկերված է α հարթությանն ուղղահայաց a ուղիղը: Մեր շրջակայքի պարագաներից կարող ենք բերել բազմաթիվ օրինակներ, որոնք լուսաբանում են ուղղի և հարթության ուղղահայացությունը: Օրինակ՝ չխոտորված էլեկտրասյունը կանգնած է ուղիղ՝ գետնի հարթությանն ուղղահայաց: Ուղղահայաց են դասավորված նաև շենքի սյուները հիմքի հարթության նկատմամբ, պատերի հատման գծերը հատակի հարթության նկատմամբ և այլն:

Ապացուցենք երկու թեորեմ, որոնցով կապ է հաստատվում ուղիղների զուգահեռության և հարթությանը դրանց ուղղահայացության միջև:

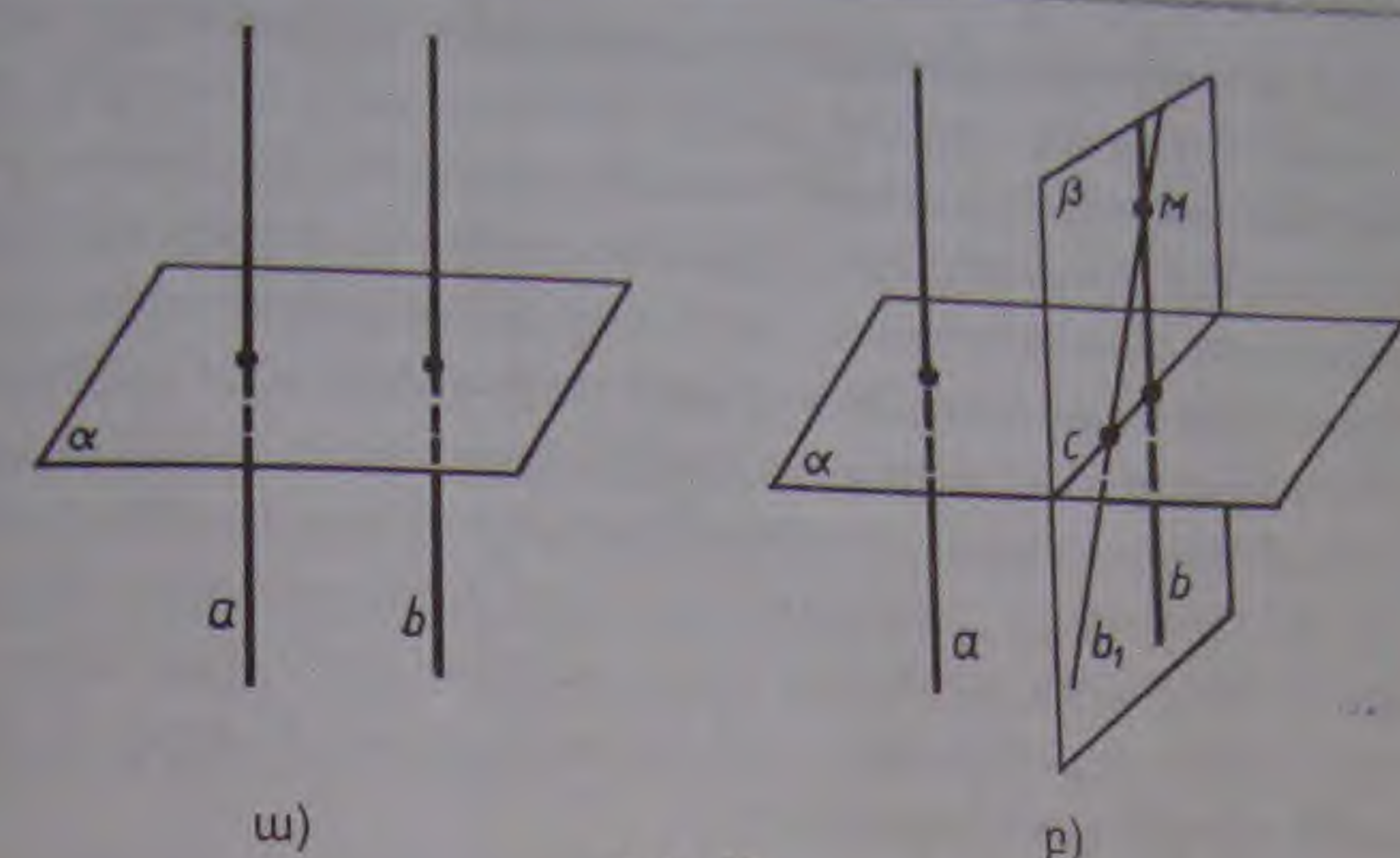
Թեորեմ: ***Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկն ուղղահայաց է հարթությանը, ապա մյուս ուղիղը ևս ուղղահայաց է այդ հարթությանը:***



Նկ. 45



Նկ. 46



Նկ. 47

Ապացուցում: Դիտարկենք երկու՝ a և a_1 զուգահեռ ուղիղները և α հարթությունը, այնպիսին, որ $a \perp \alpha$: Ապացուցենք, որ $a_1 \perp \alpha$:

α հարթության մեջ տանենք որևէ x ուղիղ (նկ. 46): Քանի որ $a \perp \alpha$, ապա $a \perp x$: Ըստ երկու զուգահեռ ուղիղների՝ երրորդին ուղղահայաց լինելու մասին լեմմի՝ $a_1 \perp x$: Քանի որ x-ը α հարթության կամայական ուղիղ է, ուրեմն a_1 ուղիղը ուղղահայաց է α հարթության մեջ ընկած ցանկացած ուղղին, այսինքն՝ $a_1 \perp \alpha$: Թեորեմն ապացուցված է:

Ապացուցենք հակադարձ թեորեմը:

Թեորեմ: ***Եթե երկու ուղիղներ ուղղահայաց են հարթությանը, ապա իրենք զուգահեռ են:***

Ապացուցում: Դիտարկենք α հարթությանն ուղղահայաց a և b ուղիղները (նկ. 47,ա): Ապացուցենք, որ $a \| b$:

b ուղղի որևէ M կետով տանենք a ուղղին զուգահեռ b_1 ուղիղը: Ըստ նախորդ թեորեմի՝ $b_1 \perp \alpha$: Ապացուցենք, որ b_1 ուղիղը համընկնում է b ուղղին, դա էլ հենց կնշանակի, որ $a \| b$:

Ենթադրենք, թե b և b_1 ուղիղները չեն համընկնում: Այդ դեպքում b և b_1 ուղիղներն ընդգրկող β հարթության մեջ կստացվի այսպիսի պատկեր. β և α հարթությունների հատման c ուղղին նույն M կետից տարված են երկու ուղղահայացներ՝ b-ն և b_1-ը (նկ. 47,բ): Իսկ դա հնարավոր չէ և, ուրեմն, b և b_1 ուղիղները համընկնում են, այսինքն՝ $a \| b$: Թեորեմն ապացուցված է:

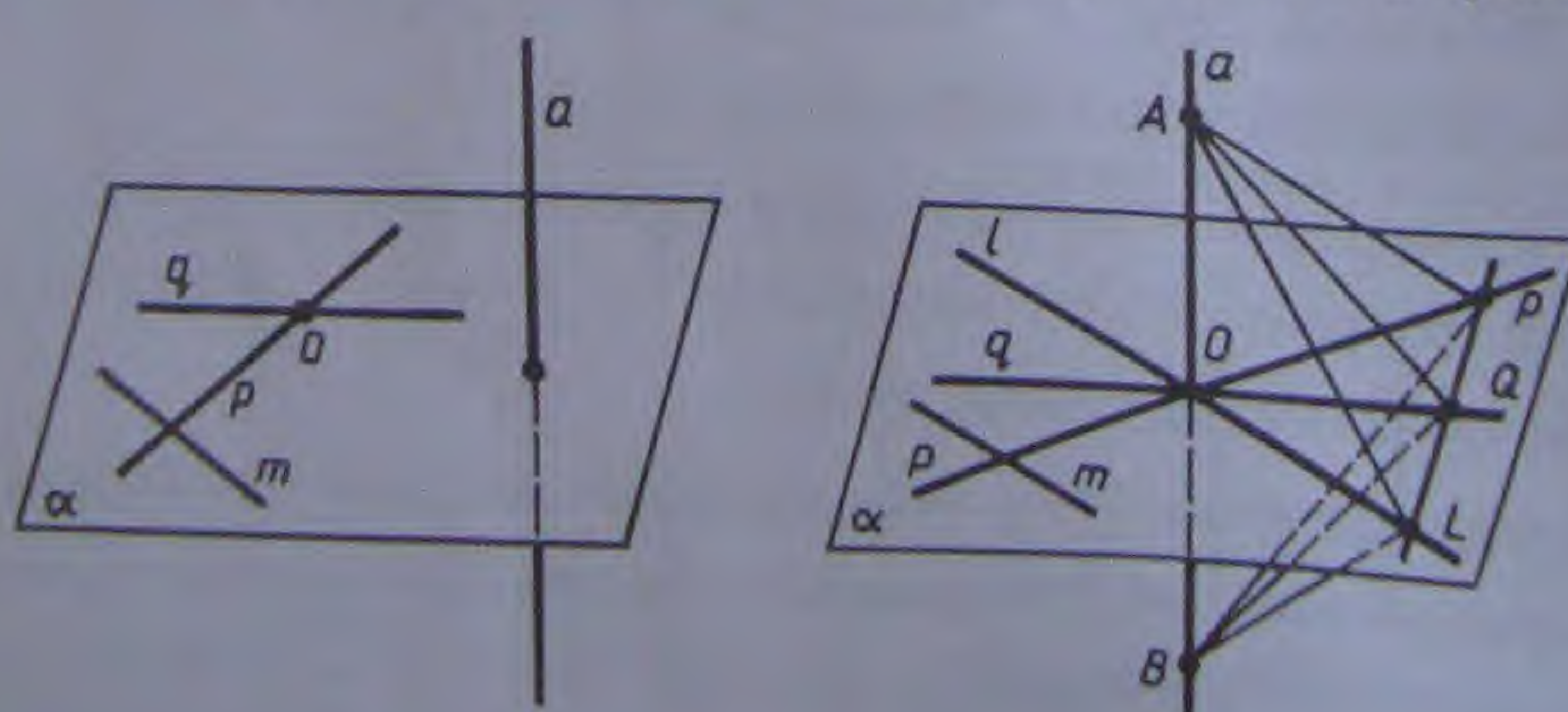
17 Ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշը

Ինչպե՞ս ստուգել՝ տրված ուղիղը ուղղահայա՞ց է, արդյոք, տրված հարթությանը, թե՞ ոչ: Այս հարցն ունի գործնական մեծ նշանակություն: Օրինակ՝ կայմեր տեղակայելիս, շենքերի սյուներ կանգնեցնելիս և այլ իրավիճակներում պահանջվում է, որ դրանք տեղադրվեն ուղիղ, այսինքն՝ ուղղահայաց այն հարթությանը, որի վրա ամրացվում են: Պարզվում է, որ դրա համար կարիք չկա ստուգել ուղղահայացությունը ցանկացած ուղղի նկատմամբ, ինչպես ասված է սահմանման մեջ (գործնականում դա հնարավոր էլ չէ): Կարելի է բավարարվել՝ ստուգելով ուղղահայացությունը հարթության մեջ ընկած ընդամենը երկու հատվող ուղիղների նկատմամբ: Դա բխում է հետևյալ թեորեմից, որն արտահայտում է **ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշ:**

Թ ե ո ր ե մ : ***Եթե ուղիղն ուղղահայաց է հարթության մեջ ընկած երկու հատվող ուղիղների, ապա այն ուղղահայաց է այդ հարթությանը:***

Ա պ ա ց ու ց ու մ : Դիտարկենք a ուղիղը, որն ուղղահայաց է α հարթության մեջ ընկած p և q ուղիղներին, որոնք հատվում են O կետում (նկ. 48,ա): Ապացուցենք, որ $a \perp \alpha$: Դրա համար հարկավոր է ապացուցել, որ a ուղիղն ուղղահայաց է α հարթության կամայական m ուղղին:

Քննության առնենք նախ այն դեպքը, երբ a ուղիղն անցնում է O կետով (նկ. 48,բ): O կետով տանենք տվյալ m ուղղին զուգահեռ ℓ ուղիղը (եթե m ուղիղն անցնում է O կետով, ապա որպես ℓ կվերցնենք հենց m ուղիղը): a ուղղի վրա նշենք A և B կետեր այնպես, որ O կետը լինի AB հատվածի միջնակետը: α հարթության մեջ տանենք մի ուղիղ, որը հատում է p, q և ℓ ուղիղները, համապատասխանաբար, P, Q և L կետերում:



ա) բ)

Նկ. 48

Որոշակիության համար ընդունենք, որ Q կետն ընկած է P և L կետերի միջև (նկ. 48,բ):

Նկատենք, որ p և q ուղիղները AB հատվածի միջնուղղահայացներ են և, ուրեմն, $AB=BP$, $AQ=BQ$: Հետևաբար՝ $\Delta APQ=\Delta BPQ$, ըստ երեք կողմերի: Ուրեմն՝ $\angle APQ=\angle BPQ$:

Համեմատենք APL և BPL եռանկյունները: Դրանք ունեն երկուական հավասար կողմեր և դրանցով կազմված հավասար անկյուններ ($AP=BP$, PL-ը ընդհանուր կողմ է, $\angle APL=\angle BPL$): Ուրեմն՝ այդ եռանկյունները, հետևաբար նաև նրանց երրորդ կողմերը հավասար են. $AL=BL$: Իսկ դա նշանակում է, որ ABL եռանկյունը հավասարասրուն է, և նրա LO միջնագիծը նաև բարձրություն է, այսինքն՝ $\ell\perp a$: Քանի որ $\ell\parallel m$ և $\ell\perp a$, ապա $m\perp a$ (ըստ զուգահեռ ուղիղների՝ երրորդ ուղղին ուղղահայացության մասին լեմմի):

Այսպիսով՝ a ուղիղն ուղղահայաց է α հարթության ցանկացած m ուղղին, այսինքն՝ $a\perp\alpha$:

Այժմ քննության առնենք այն դեպքը, երբ a ուղիղը O կետով չի անցնում: O կետով տանենք a ուղղին զուգահեռ a_1 ուղիղը: Ըստ վերոհիշյալ լեմմի՝ $a_1\perp p$ և $a_1\perp q$, ուրեմն՝ ըստ առաջին դեպքում ապացուցվածի, $a_1\perp\alpha$: Դրանից (ըստ կետ 16-ի առաջին թեորեմի) հետևում է, որ $a\perp\alpha$: Թեորեմն ապացուցված է:

Օգտվենք ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշից հետևյալ խնդիրը լուծելու համար:

Խ ն դ ի ր

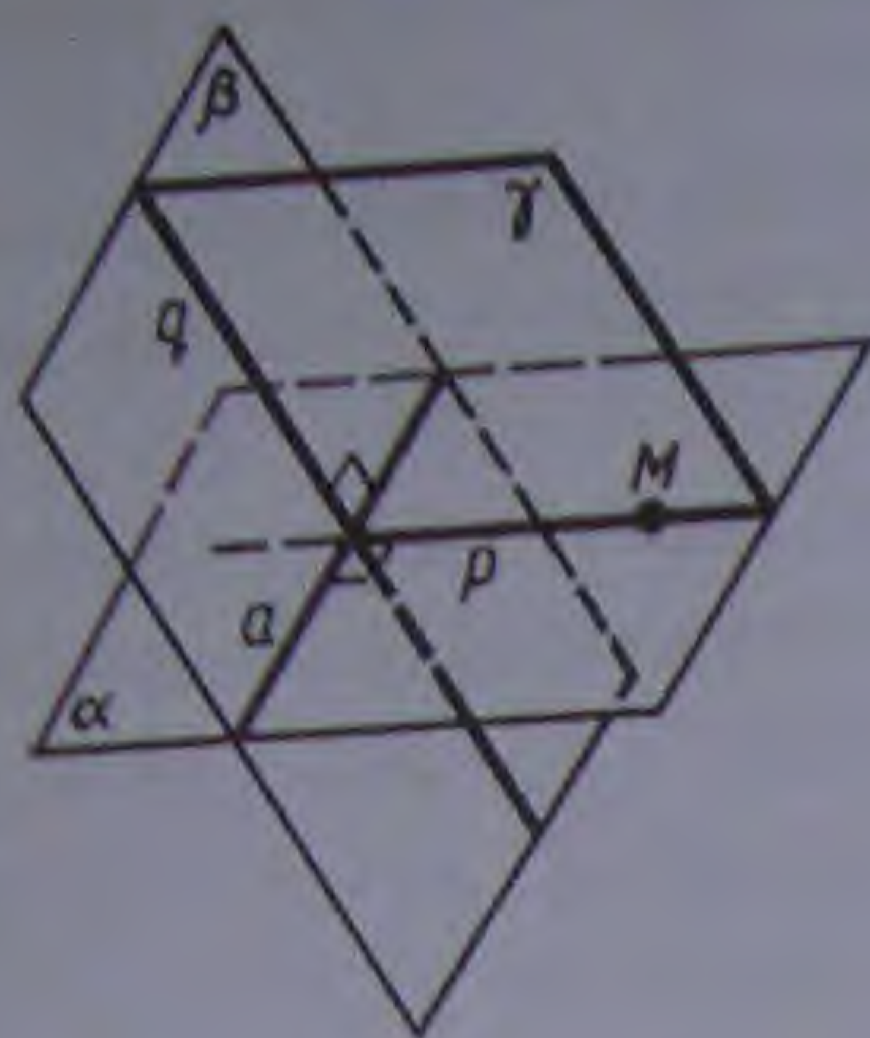
Ապացուցել, որ տարածության ցանկացած կետով անցնում է տրված ուղղին ուղղահայաց հարթություն:

Լ ո ւ ծ ո ւ մ : Նշանակենք տրված ուղիղը a տառով, իսկ տարածության կամայական կետը՝ M տառով: Ապացուցենք, որ գոյություն ունի հարթություն, որն անցնում է M կետով և ուղղահայաց է a ուղղին:

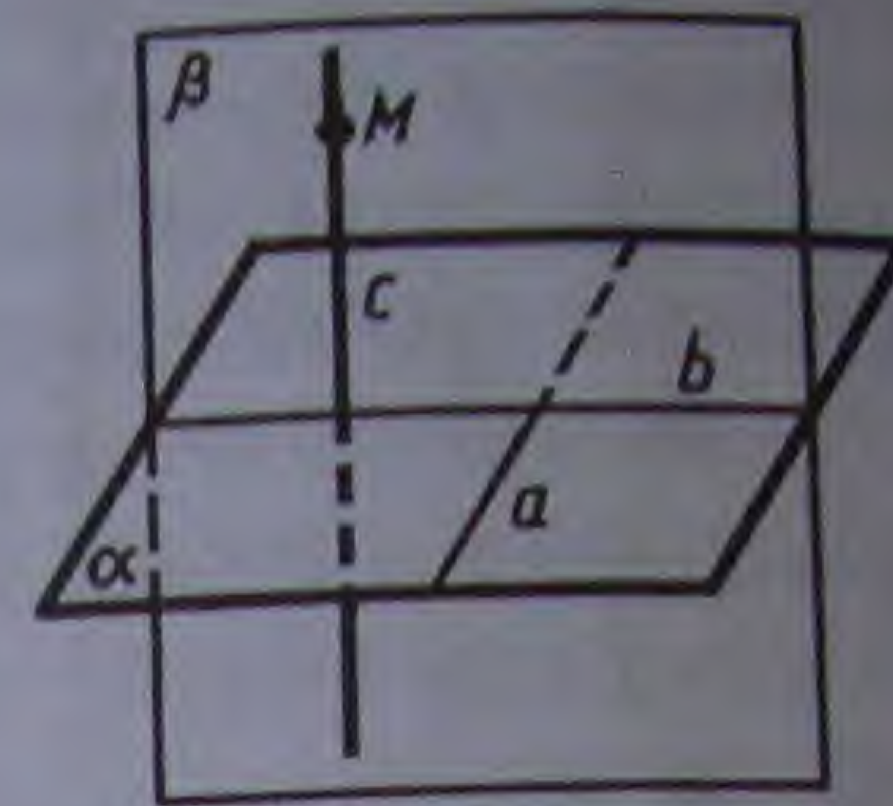
a ուղղով տանենք երկու հարթություններ՝ α-ն և β-ն, այնպես, որ $M\in\alpha$ (նկ. 49)*: α հարթության մեջ M կետով տանենք a ուղղին ուղղահայաց p ուղիղը, իսկ β հարթության մեջ p և a ուղիղների հատման կետով տանենք q ուղիղը՝ ուղղահայաց a ուղղին: Դիտարկենք p և q ուղիղներով անցնող γ հարթությունը: Հենց γ հարթությունը որոնելին է, որովհետև a ուղիղն ուղղահայաց է այդ հարթության երկու հատվող ուղիղներին՝ p-ին և q-ին:

---

* Նկար 49-ում պատկերված է այն դեպքը, երբ M կետն ընկած չէ a ուղղի վրա: Սակայն խնդրի բերված լուծումը պիտանի է նաև այն դեպքի համար, երբ M կետն ընկած է a ուղղի վրա:



Նկ. 49



Նկ. 50

Պ ա ր զ ա բ ա ն ու մ

Կարելի է ապացուցել, որ γ-ն միակ հարթությունն է, որ անցնում է M կետով և ուղղահայաց է a ուղղին (խնդիր 133):

(18) Թեորեմ հարթությանն ուղղահայաց ուղղի մասին

Թ ե ո ր ե մ : ***Տարածության ցանկացած կետով անցնում է տրված հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը:***

Ա պ ա ց ու ց ու մ : Տրված հարթությունը նշանակենք α տառով, իսկ տարածության կամայական կետը՝ M տառով: Ապացուցենք. **1)** M կետով անցնում է ուղիղ՝ ուղղահայաց α հարթությանը, **2)** կա այդպիսի միայն մեկ ուղիղ:

1) α հարթության մեջ տանենք կամայական a ուղիղ և դիտարկենք այն β հարթությունը, որն անցնում է M կետով և ուղղահայաց է a ուղղին (նկ. 50): Ուղիղը, որով հատվում են α և β հարթությունները, նշանակենք b տառով: β հարթության մեջ M կետով տանենք b ուղղին ուղղահայաց c ուղիղը: c ուղիղն էլ հենց որոնելին է: Բանն այն է, որ c-ն ուղղահայաց է α հարթությանը, որովհետև այն ուղղահայաց է այդ հարթության երկու հատվող ուղիղներին (ըստ կառուցման՝ $c\perp b$, և քանի որ $\beta\perp a$, ուրեմն՝ $c\perp a$):

2) Ենթադրենք, թե M կետով անցնում է α հարթությանն ուղղահայաց մեկ այլ ուղիղ ևս (այն նշանակենք c_1): Այդ դեպքում (ըստ կետ 16-ի հակադարձ թեորեմի) $c_1\|c$, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ c և c_1 ուղիղները M կետում հատվում են: Այսպիսով՝ M կետով անցնում է միայն մեկ ուղիղ, որն ուղղահայաց է α հարթությանը: Թեորեմն ապացուցված է:

Խնդիրներ

116. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: Ապացուցեք, որ
ա) $DC \perp B_1C_1$, և $AB \perp A_1D_1$, եթե $\angle BAD=90^0$,
բ) $AB \perp CC_1$, և $DD_1 \perp A_1B_1$, եթե $AB \perp DD_1$:

117. $ABCD$ քառանիստում $BC \perp AD$: Ապացուցեք, որ $AD \perp MN$, որտեղ M-ը և N-ը AB և AC կողերի միջնակետերն են:

118. A, M և O կետերն ընկած են α հարթությանն ուղղահայաց ուղղի վրա, իսկ O, B, C և D կետերը՝ α հարթության մեջ: Հետևյալ անկյուններից որո՞նք են ուղիղ անկյուններ՝ $\angle AOB$, $\angle MOC$, $\angle DAM$, $\angle DOA$, $\angle BMO$:

119. OA ուղիղն ուղղահայաց է OBC հարթությանը, O կետը AD հատվածի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ. **ա)** $AB=DB$, **բ)** $AB=AC$, եթե $OB=OC$, **գ)** $OB=OC$, եթե $AB=AC$:

120. a կողմով քառակուսու անկյունագծերի հատման O կետով տարված է OK ուղիղը, որն ուղղահայաց է քառակուսու հարթությանը: Գտեք K կետի հեռավորությունը քառակուսու գագաթներից, եթե $OK=b$:

121. ABC եռանկյան մեջ տրված է, որ $\angle C=90^0$, AC=6սմ, BC=8սմ, իսկ CM-ը միջնագիծն է: C գագաթով տարված է CK ուղիղ, որն ուղղահայաց է ABC եռանկյան հարթությանը, ընդ որում՝ CK=12սմ: Գտեք KM-ը:

122. CD ուղիղն ուղղահայաց է ABC կանոնավոր եռանկյան հարթությանը: Այդ եռանկյան O կենտրոնով տարված է CD ուղղին զուգահեռ ուղիղ՝ OK-ն: Հայտնի է, որ $AB=16\sqrt{3}$ սմ, OK=12սմ, CD=16սմ: Գտեք D և K կետերի հեռավորությունները եռանկյան A և B գագաթներից:

123. Ապացուցեք, որ եթե α և β երկու հարթություններն ուղղահայաց են a ուղղին, ապա իրենք զուգահեռ են:

Լուծում: Տանենք a ուղղին զուգահեռ որևէ ուղիղ այնպես, որ այն α և β հարթությունները հատի A և B տարբեր կետերում: Ըստ կետ 16-ի առաջին թեորեմի՝ α և β հարթություններն ուղղահայաց են AB ուղղին:

Եթե ենթադրենք, թե α և β հարթությունները զուգահեռ չեն, այսինքն ունեն գոնե մեկ ընդհանուր M կետ, ապա կստանանք այնպիսի ABM եռանկյուն, որն ունի A և B գագաթներով երկու ուղիղ անկյուններ, ինչը հնարավոր չէ: Ուրեմն α-ն և β-ն զուգահեռ հարթություններ են՝ $\alpha \parallel \beta$:

124. PQ ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը: P և Q կետերով տարված են α հարթությանն ուղղահայաց ուղիղներ, որոնք հատում են այդ հարթությունը, համապատասխանաբար, P_1 և Q_1 կետերում: Ապացուցեք, որ $PQ=P_1Q_1$:

125. PQ ուղղի P և Q կետերով տարված են α հարթությանն ուղղահայաց ուղիղներ, որոնք այդ հարթությունը հատում են, համապատասխանաբար, P_1 և Q_1 կետերում: Գտեք P_1Q_1-ը, եթե PQ=15սմ, PP_1=21,5սմ, QQ_1=33,5սմ:

126. MB ուղիղն ուղղահայաց է ABC եռանկյան AB և BC կողմերին: Որոշեք MBD եռանկյան տեսքը, որտեղ D-ն AC ուղղի կամայական կետ է:

127. ABC եռանկյան A և B անկյունների գումարը 90^0 է: BD ուղիղն ուղղահայաց է ABC հարթությանը: Ապացուցեք, որ $CD \perp AC$:

128. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման O կետով տարված է OM ուղիղն այնպես, որ $MA=MC$, $MB=MD$: Ապացուցեք, որ OM ուղիղն ուղղահայաց է զուգահեռագծի հարթությանը:

129. AM ուղիղն ուղղահայաց է $ABCD$ քառակուսու հարթությանը, իսկ այդ քառակուսու անկյունագծերը հատվում են O կետում: Ապացուցեք, որ. **ա)** BD ուղիղն ուղղահայաց է AMO հարթությանը: **բ)** $MO \perp BD$:

130. $ABCD$ քառակուսու B գագաթով տարված է BM ուղիղը: Հայտնի է, որ $\angle MBA=\angle MBC=90^0$, $MB=m$, $AB=n$: Գտեք M կետի հեռավորությունը՝ **ա)** քառակուսու գագաթներից, **բ)** AC և BD ուղիղներից:

131. $ABCD$ քառանիստում BC կողի միջնակետը M կետն է, և $AB=AC$, $DB=DC$: Ապացուցեք, որ ADM եռանկյան հարթությունն ուղղահայաց է BC ուղղին:

132. Ապացուցեք, որ եթե երկու զուգահեռ հարթություններից մեկը ուղղահայաց է ուղղին, ապա մյուս հարթությունը ևս ուղղահայաց է այդ ուղղին:

133. Ապացուցեք, որ տարածության ցանկացած կետով անցնում է տրված ուղղին ուղղահայաց միայն մեկ հարթություն:

Լ ու ծ ու մ ։ Ըստ 17-ի խնդրի համաձայն՝ տրված M կետով անցնում է α հարթություն, որ ուղղահայաց է տրված a ուղղին: Ենթադրենք, թե տրված M կետով անցնում է այդ ուղղին ուղղահայաց ևս մեկ՝ α_1 հարթություն: Այդ դեպքում α և α_1 հարթությունները կլինեն զուգահեռ (տե՛ս խնդիր 123-ը): Բայց դա հնարավոր չէ, քանի որ այդ հարթություններն ունեն ընդհանուր կետ՝ M-ը: Հետևաբար՝ մեր ենթադրությունը ճշմարիտ չէ և, ուրեմն, M կետով անցնում է a ուղղին ուղղահայաց միայն մեկ հարթություն:

134. Ապացուցեք, որ a ուղղի վրա տրված M կետով անցնող և այդ ուղղին ուղղահայաց բոլոր ուղիղներն ընկած են այն հարթության մեջ, որն անցնում է M կետով և ուղղահայաց է a ուղղին:

135. a ուղիղն ուղղահայաց է α հարթությանը և ուղղահայաց է այդ հարթության մեջ չընկած b ուղղին: Ապացուցեք, որ $b \| \alpha$:

136. Ապացուցեք, որ եթե X կետը հավասարահեռ է տրված AB հատվածի ծայրակետերից, ապա այն ընկած է մի հարթության մեջ, որն անցնում է AB հատվածի միջնակետով և ուղղահայաց է AB ուղղին:

137. Ապացուցեք, որ երկու փոխուղղահայաց խաչվող ուղիղներից յուրաքանչյուրով անցնում է հարթություն, որն ուղղահայաց է մյուս ուղղին:

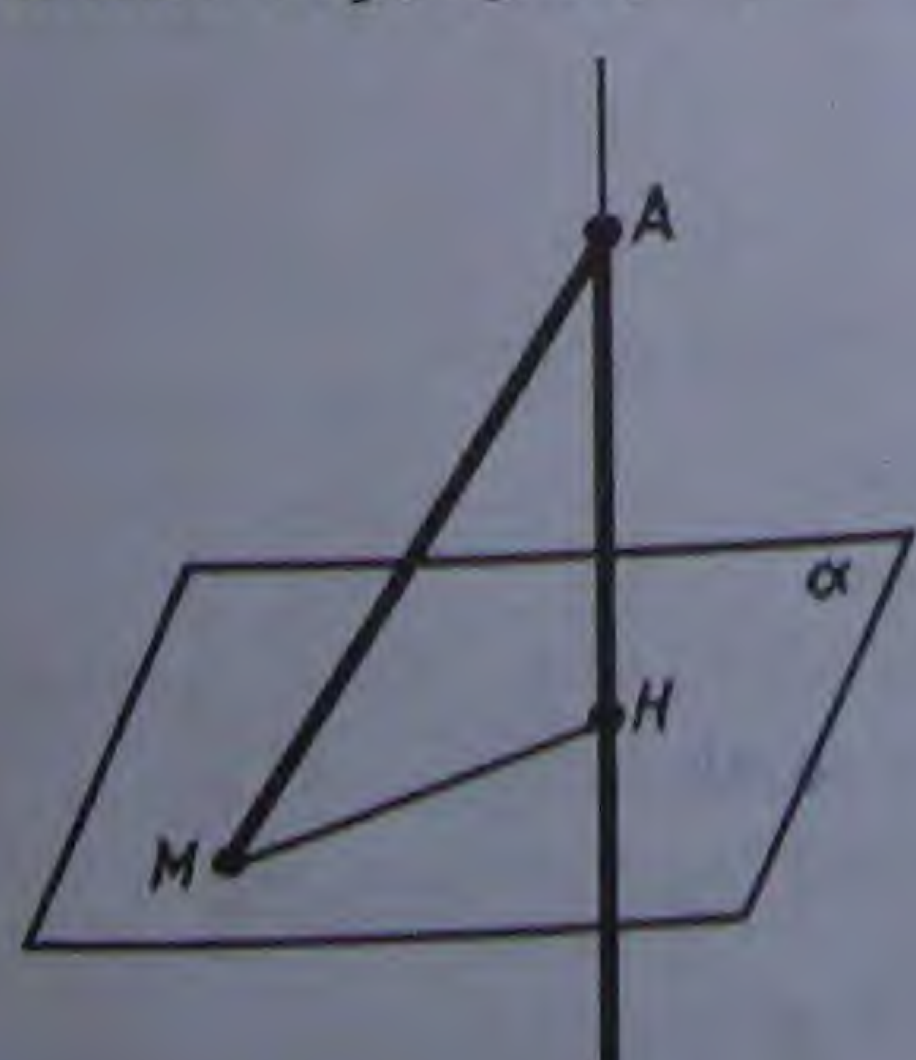
§ 2 Ուղղահայացը և թեքերը: Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը

19 Կետի հեռավորությունը հարթությունից

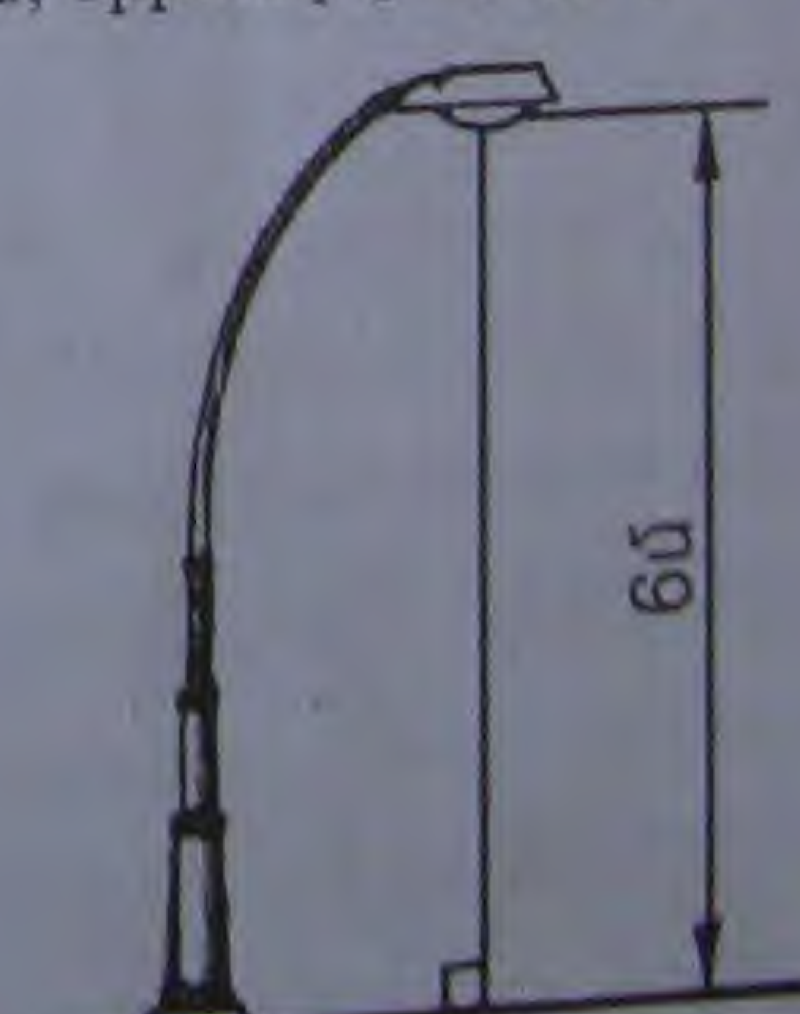
Դիտարկենք α հարթությունը և A կետը, որն ընկած չէ այդ հարթության մեջ: A կետով տանենք α հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ, այդ ուղղի և α հարթության հատման կետը նշանակենք H տառով (նկ. 51): AH հատվածը կոչվում է **A կետից α հարթությանը տարված ուղղահայաց**, իսկ H կետը՝ **ուղղահայացի հիմք:** α հարթության մեջ նշենք որևէ M կետ՝ H-ից տարբեր, և տանենք AM հատվածը: Այն կոչվում է **A կետից α հարթությանը տարված թեք,** իսկ M կետը՝ **թեքի հիմք:** HM հատվածը կոչվում է **թեքի պրոյեկցիա α հարթության վրա:**

Համեմատենք AH ուղղահայացը և AM թեքը: AMH ուղղանկյուն եռանկյան մեջ AH կողմը էջ է, իսկ AM կողմը՝ ներքնաձիգ, ուստի՝ $AH<AM$: Այսպիսով՝ **տրված կետից հարթությանը տարված ուղղահայացը փոքր է ցանկացած թեքից, որը նույն կետից տարված է այդ հարթությանը:**

Հետևաբար՝ A կետից α հարթության տարբեր կետերի հեռավորությունից բոլորի փոքրագույնը H կետի հեռավորությունն է: Այդ հեռավորությունը, այսինքն՝ A կետից α հարթությանը տարված ուղղահայացի երկարությունը կոչվում է **A կետի հեռավորություն α հարթությունից:** Երբ մենք ասում ենք, որ այս կամ այն առարկան, օրինակ փողոցի լուսարձակի



Նկ. 51



Նկ. 52

լամպը գտնվում է գետնից այսինչ, ասենք՝ 6մ, բարձրության վրա, ապա նկատի ունենք, որ գետնի մակերևույթից լամպի հեռավորությունը չափվում է այն ուղղահայացով, որը գետնի հարթությանը տարված է լամպից (նկ. 52):

Պ ա ր զ ա բ ա ն ո ւ մ

1. Եթե երկու հարթություններ զուգահեռ են, ապա հարթություններից մեկի բոլոր կետերը հավասարահեռ են մյուս հարթությունից: Իսկապես, դիտարկենք AA_0 և MM_0 ուղղահայացները, որոնք α հարթության կամայական երկու՝ A և M կետերից տարված են α-ին զուգահեռ β հարթությանը: Քանի որ $AA_0 \perp \beta$ և $MM_0 \perp \beta$, ապա $AA_0 \| MM_0$: Դրանից հետևում է, որ $MM_0 = AA_0$ (կետ 11-ի հատկություն 2⁰), այսինքն՝ α հարթության ցանկացած M կետի հեռավորությունը β հարթությունից հավասար է AA_0 հատվածի երկարությանը: Ակնհայտ է, որ β հարթության բոլոր կետերը գտնվում են α հարթությունից նույն հեռավորության վրա:

Զուգահեռ հարթություններից մեկի կամայական կետի հեռավորությունը մյուս հարթությունից կոչվում է **զուգահեռ հարթությունների հեռավորություն:**

Ինչպես արդեն ասվել է, զուգահեռ հարթությունների օրինակ են ծառայում սենյակի առաստաղի և հատակի հարթությունները: Առաստաղի բոլոր կետերը գտնվում են հատակից միևնույն հեռավորության վրա: Հենց այդ հեռավորությունն էլ սենյակի բարձրությունն է:

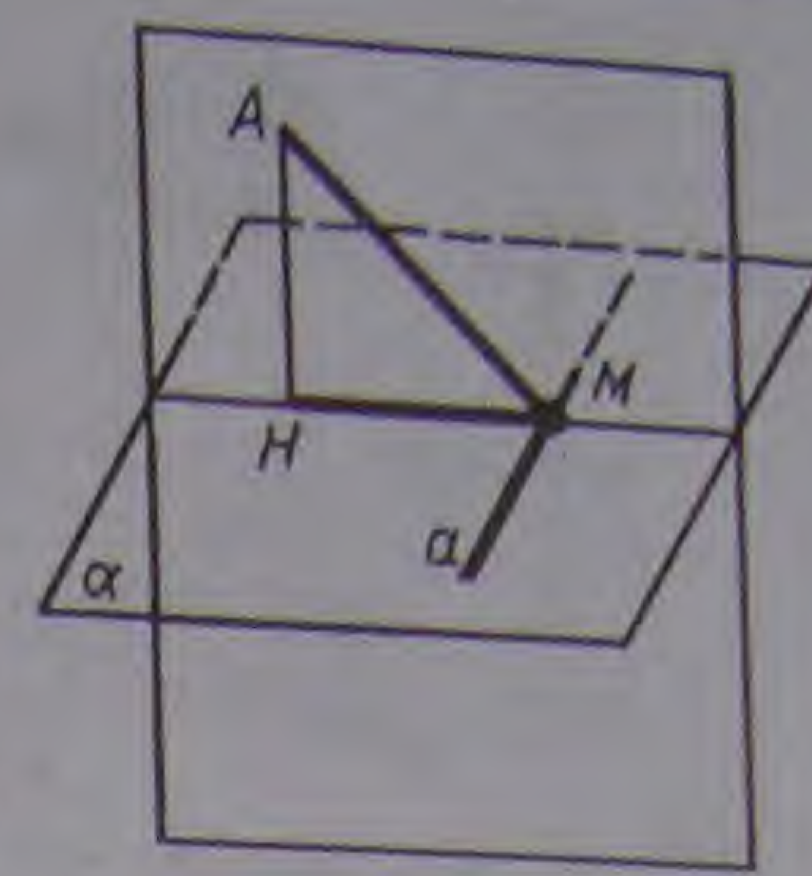
2. Եթե ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը, ապա ուղղի բոլոր կետերը հավասարահեռ են հարթությունից (խնդիր 144): Այս դեպքում ուղղի կամայական կետի հեռավորությունը հարթությունից կոչվում է **ուղղի և նրան զուգահեռ հարթության հեռավորություն:**

3. Եթե երկու ուղիղներ խաչվող են, ապա, ինչպես ապացուցվել է կետ 7-ում, նրանցից յուրաքանչյուրով անցնում է մյուս ուղղին զուգահեռ հարթություն, ընդ որում՝ միայն մեկը: Խաչվող ուղիղներից մեկի հեռավորությունը այն հարթությունից, որն անցնում է մյուս ուղղով և զուգահեռ է առաջին ուղղին, կոչվում է **խաչվող ուղիղների հեռավորություն:**

20 Երեք ուղղահայացների մասին թեորեմը

Թ ե ո ր ե մ : ***Թեքի հիմքով հարթության մեջ տարված ուղիղը, որն ուղղահայաց է այդ հարթության վրա նրա պրոյեկցիային, ուղղահայաց է նաև իրեն՝ թեքին:***

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ : Դիտենք նկար 53-ը. նրանում AH հատվածը α հարթությանը տարված ուղղահայացն է, AM-ը՝ թեքը, իսկ a-ն այն ուղիղն



Նկ. 53

է, որը M կետով տարված է α հարթության մեջ՝ թեքի HM պրոյեկցիային ուղղահայաց: Ապացուցենք, որ $a\perp AM$:

Դիտարկենք AMH հարթությունը: a ուղիղն ուղղահայաց է այդ հարթությանը, որովհետև այն ուղղահայաց է AMH հարթության մեջ ընկած երկու հատվող ուղիղներին՝ MH-ին և AH-ին (ըստ պայմանի $a\perp HM$, իսկ քանի որ $AH\perp\alpha$, ապա $a\perp AH$): Դրանից հետևում է, որ a ուղիղն ուղղահայաց է AMH հարթության մեջ ընկած ցանկացած ուղղին, մասնավորապես՝ $a\perp AM$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Այս թեորեմը կոչվում է **երեք ուղղահայացների մասին թեորեմ,** քանի որ նրանում ասվում է երեք ուղղահայացների՝ AH-ի, HM-ի և AM-ի կապի մասին:

Ստույգ է նաև **հակադարձ թեորեմը,** այն է՝ **հարթության մեջ թեքի հիմքով տարված ուղիղը, որն ուղղահայաց է այդ թեքին, ուղղահայաց է նաև նրա պրոյեկցիային:**

Այս թեորեմն ապացուցեք ինքնուրույն՝ ուղիղ թեորեմի ապացուցմանը համանման՝ օգտվելով նկար 53-ից (խնդիր 153):

21 Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը

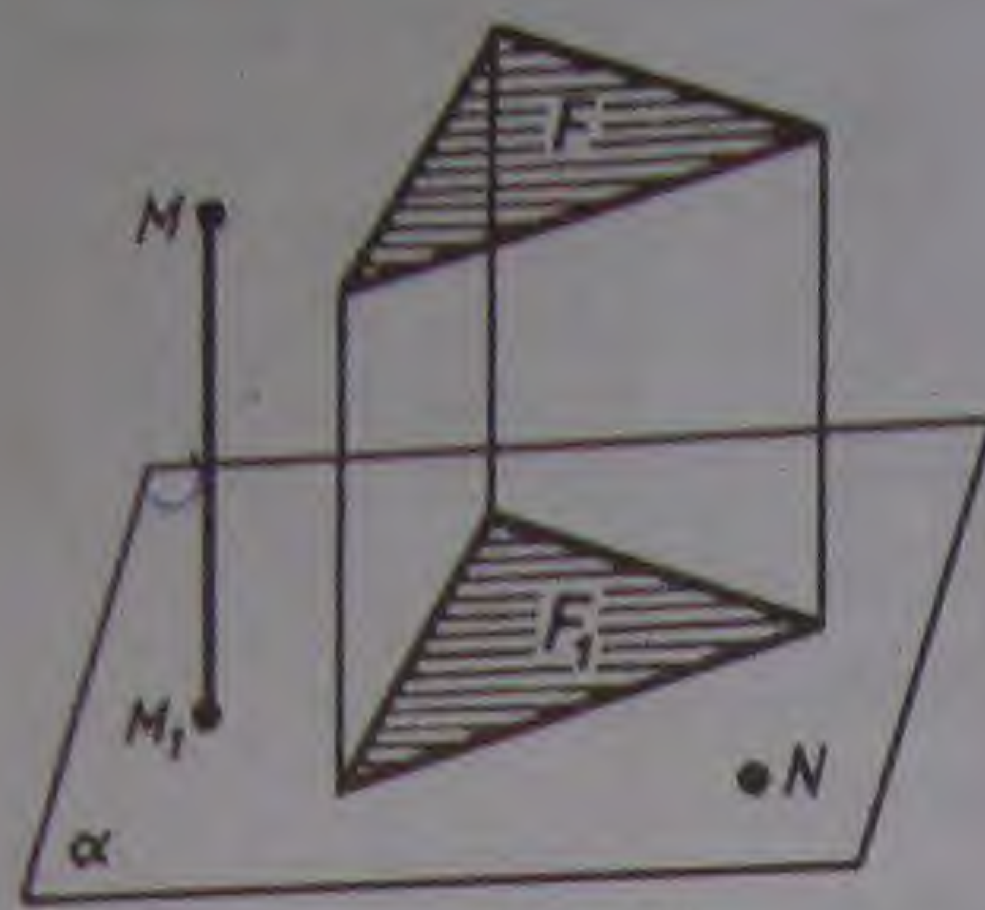
Կետ 19-ում տրվել է հարթության վրա թեքի պրոյեկցիայի հասկացությունը: Այժմ ներմուծենք կամայական պատկերի պրոյեկցիայի* հասկացությունը:

Կետի պրոյեկցիա հարթության վրա կոչվում է այդ կետից հարթությանը տարված ուղղահայացի հիմքը՝ եթե կետն ընկած չէ հարթության մեջ, և այդ կետն ինքը, եթե այն ընկած է հարթության մեջ: Նկար 54-ում M_1 կետը M կետի պրոյեկցիան է α հարթության վրա, իսկ N կետը հենց իր՝ N-ի պրոյեկցիան է այդ նույն հարթության վրա ($N\in\alpha$):

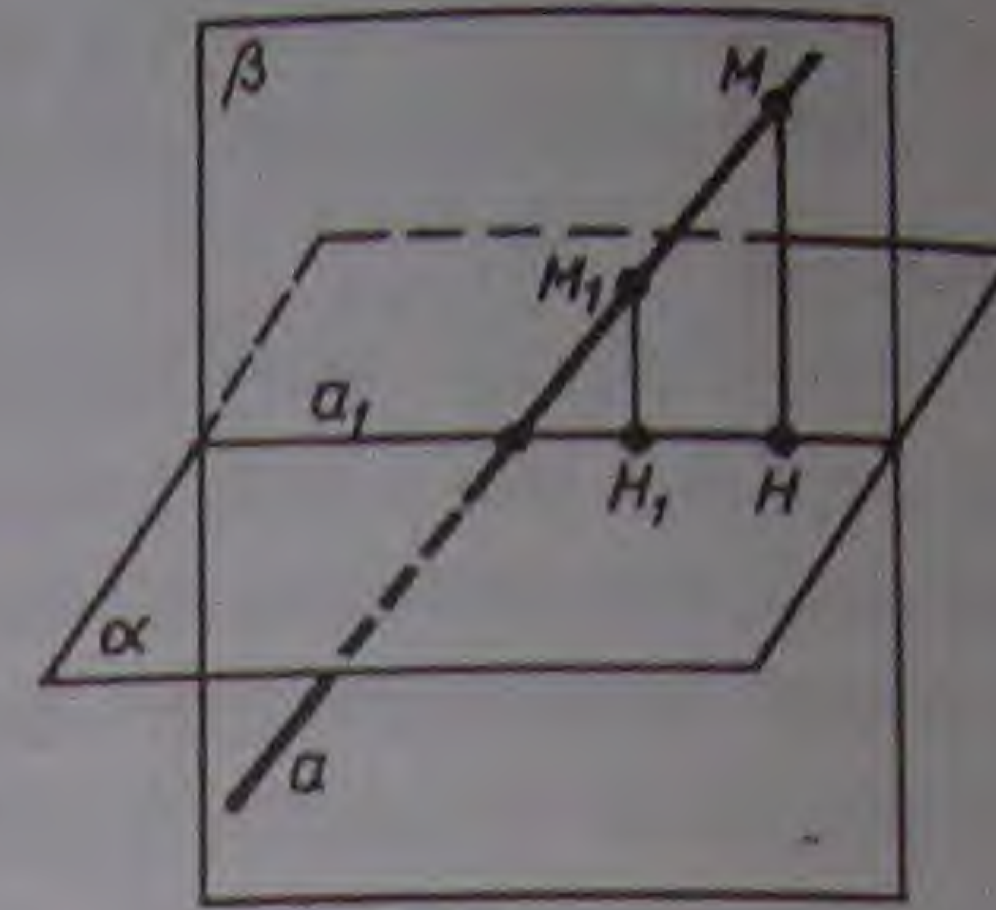
F տառով նշանակենք մի որևէ պատկեր տարածության մեջ: Եթե կառուցենք F պատկերի բոլոր կետերի պրոյեկցիաները տրված հարթության վրա, ապա կստանանք մի F_1 պատկեր, որը կոչվում է **F պատկերի պրոյեկցիա տրված հարթության վրա:** Նկար 54-ում F_1 եռանկյունը F եռանկյան պրոյեկցիան է α հարթության վրա:

Այժմ ապացուցենք, **որ ուղղի պրոյեկցիան այդ ուղղին ոչ ուղղահայաց հարթության վրա ուղիղ է:**

* Այս կետում խոսվում է պատկերի ուղղանկյուն պրոյեկցիայի մասին: Պատկերի զուգահեռ պրոյեկցիայի ընդհանուր հասկացությունը քննության է առնվում հավելվածում:



Նկ. 54



Նկ. 55

Տրված հարթությունը նշանակենք α տառով, իսկ α հարթությանը ոչ ուղղահայաց կամայական ուղիղը՝ a տառով (նկ. 55)։ a ուղղի որևէ M կետից տանենք α հարթությանն ուղղահայաց՝ MH-ը։ Դիտարկենք a և MH ուղիղներով անցնող β հարթությունը։ α և β հարթությունները հատվում են մի որևէ a_1 ուղղով։ Ապացուցենք, որ հենց այդ ուղիղն էլ a ուղղի պրոյեկցիան է α հարթության վրա։ Իսկապես, վերցնենք a ուղղի կամայական M_1 կետ և β հարթության մեջ տանենք MH ուղղին զուգահեռ ուղիղ՝ M_1H_1-ը (H_1-ը M_1H_1 և a_1 ուղիղների հատման կետն է)։ Ըստ կետ 16-ի առաջին թեորեմի՝ $M_1H_1 \perp \alpha$ և, ուրեմն, H_1 կետը M_1 կետի պրոյեկցիան է α հարթության վրա։ Մենք ապացուցեցինք, որ a ուղղի կամայական կետի պրոյեկցիան ընկած է a_1 ուղղի վրա։ Համանման ձևով ապացուցվում է, որ a_1 ուղղի ցանկացած կետը a ուղղի մի որևէ կետի պրոյեկցիա է։ Հետևաբար՝ a_1 ուղիղը a ուղղի պրոյեկցիան է α հարթության վրա։

Ապացուցված պնդումից հետևում է, որ հարթությանը ոչ ուղղահայաց AB հատվածի պրոյեկցիան այդ հարթության վրա մի հատված է, որի ծայրակետերը A և B կետերի պրոյեկցիաներն են։ Այդ առումով՝ թեքի պրոյեկցիայի սահմանումը (կետ 19) լիարժեք համաձայնեցված է պատկերի պրոյեկցիայի ընդհանուր սահմանմանը։

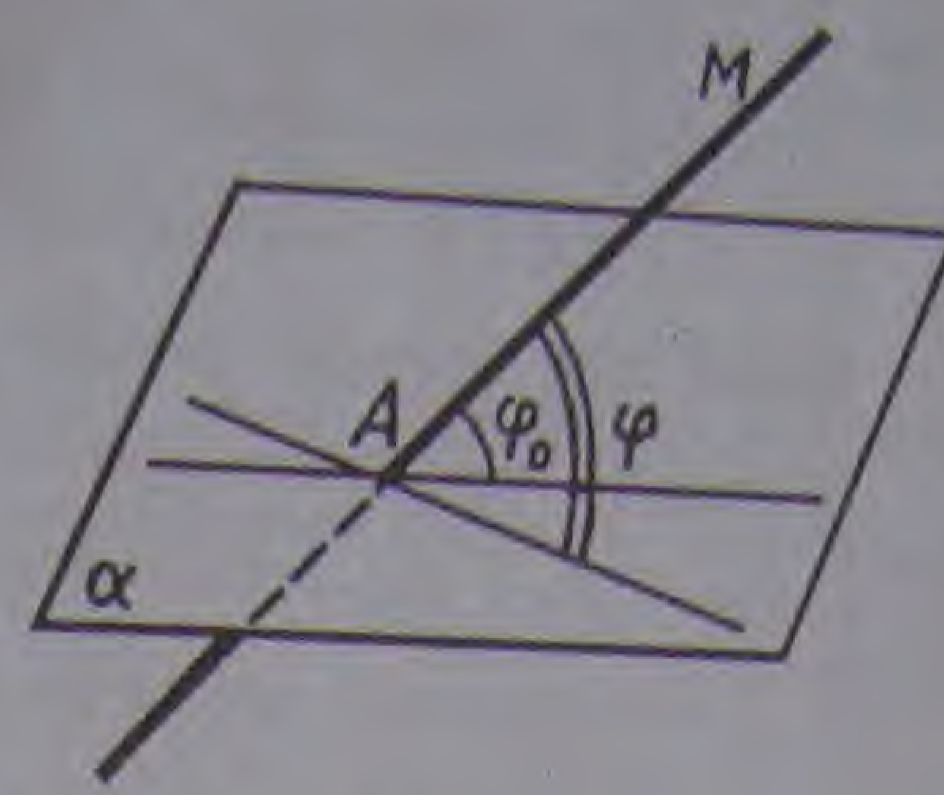
Հարթության վրա ուղղի պրոյեկցիայի հասկացությունն օգտագործելով՝ սահմանենք ուղղի և հարթության կազմած անկյունը։

Սահմանում: ***Ուղղի և այդ ուղիղը հատող ու նրան ոչ ուղղահայաց հարթության կազմած անկյուն կոչվում է այն անկյունը, որ կազմում են ուղիղը և այդ հարթության վրա նրա պրոյեկցիան:***

Կարելի է ապացուցել, որ տրված AM ուղղի և α հարթության (նկ. 56) կազմած φ_0 անկյունը փոքրագույնն է այն բոլոր φ անկյուններից, որ կազմում է տրված ուղիղը՝ α հարթության մեջ A կետով տարված ուղիղների հետ (խնդիր 162)։

Եթե ուղիղն ուղղահայաց է հարթությանը, ապա այդ հարթության վրա նրա պրոյեկցիան այդ ուղղի և հարթության հատման կետն է: Այդ դեպքում ուղղի և հարթության կազմած անկյունը համարվում է 90^0:

Եթե տրված ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը, ապա հարթության վրա նրա պրոյեկցիան ուղիղ է, որը զուգահեռ է տրված ուղղին: Ուղղի և հարթության կազմած անկյան հասկացությունը այդ դեպքի համար մենք չենք ներմուծի (երբեմն պայմանավորվում են համարել, որ զուգահեռ ուղղի և հարթության կազմած անկյունը 0^0 է):



Նկ. 56

Խնդիրներ

138. Տրված հարթությանը որևէ կետից տարված են ուղղահայաց և թեք, որոնց կազմած անկյունը φ է: **ա)** Գտեք թեքը և հարթության վրա նրա պրոյեկցիան, եթե ուղղահայացը հավասար է d-ի: **բ)** Գտեք ուղղահայացը և թեքի պրոյեկցիան, եթե թեքը հավասար է m-ի:

139. Մի որևէ կետից հարթությանը տարված են երկու թեքեր: Ապացուցեք, որ. **ա)** եթե թեքերը հավասար են, ապա հավասար են նաև նրանց պրոյեկցիաները, **բ)** եթե թեքերի պրոյեկցիաները հավասար են, ապա հավասար են նաև թեքերը, **գ)** եթե թեքերն անհավասար են, ապա ավելի մեծ թեքն ունի ավելի մեծ պրոյեկցիա:

140. α հարթությանը չպատկանող A կետից այդ հարթությանը տարված են AO ուղղահայացը և երկու հավասար թեքեր՝ AB-ն և AC-ն: Հայտնի է, որ $\angle OAB=\angle BAC=60^0$, $OA=1,5$սմ: Գտեք թեքերի հիմքերի հեռավորությունը:

141. Տրված հատվածի ծայրակետերից մեկն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ մյուսը՝ այդ հարթությունից 6սմ հեռավորության վրա: Գտեք այդ հատվածի միջնակետերի հեռավորությունը α հարթությունից:

142. Հատվածի ծայրակետերը գտնվում են α հարթությունից 1սմ և 4սմ հեռավորության վրա: Գտեք այդ հատվածի միջնակետի հեռավորությունը α հարթությունից:

143. M կետի հեռավորությունը ABC կանոնավոր եռանկյան յուրաքանչյուր գագաթից 4սմ է: Գտեք M կետի հեռավորությունը ABC հարթությունից, եթե AB=6սմ:

144. *a* ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը: Ապացուցեք, որ *a* ուղղի բոլոր կետերը հավասարահեռ են α հարթությունից:

Լուծում: *a* ուղղի որևէ կետով տանենք α հարթությանը զուգահեռ β հարթություն (խնդիր 59): *a* ուղիղն ընկած է β հարթության մեջ, այլապես՝ եթե հատեր β հարթությունը, ապա կստացվեր, որ հատում է նաև դրան զուգահեռ α հարթությունը (խնդիր 55), ինչը հնարավոր չէ: β հարթության բոլոր կետերը հավասարահեռ են α հարթությունից, ուրեմն՝ β հարթության մեջ ընկած *a* ուղղի բոլոր կետերը ևս հավասարահեռ են α հարթությունից, ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

145. *C* ուղիղ անկյունով *ABC* ուղղանկյուն եռանկյան *A* գագաթով տարված է եռանկյան հարթությանն ուղղահայաց *AD* ուղիղը: **ա)** Ապացուցեք, որ *CBD* եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է: **բ)** Գտեք *BD*-ն, եթե $BC=a$, $DC=b$:

146. *a* ուղիղը *M* կետում հատում է α հարթությունը և ուղղահայաց չէ այդ հարթությանը: Ապացուցեք, որ α հարթության մեջ *M* կետով անցնում է *a* ուղղին ուղղահայաց ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը:

147. *M* կետից տարված է *ABCD* ուղղանկյան հարթությանն ուղղահայաց՝ *MB*-ն: Ապացուցեք, որ *AMD* և *MCD* եռանկյունները ուղղանկյուն եռանկյուններ են:

148. *AK* ուղիղն ուղղահայաց է *ABC* կանոնավոր եռանկյան հարթությանը, իսկ *M* կետը *BC* կողմի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ $MK \perp BC$:

149. *AD* հատվածն ուղղահայաց է *ABC* հավասարասրուն եռանկյան հարթությանը: Հայտնի է , որ $AB=AC=5$սմ, $BC=6$սմ, $AD=12$սմ: Գտեք *AD* հատվածի ծայրակետերի հեռավորությունները *BC* ուղղից:

150. *ABCD* ուղղանկյան *A* գագաթով տարված է ուղղանկյան հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ՝ *AK*-ն: Հայտնի է, որ $KD=6$սմ, $KB=7$սմ, $KC=9$սմ: Գտեք. **ա)** *K* կետի հեռավորությունը *ABCD* ուղղանկյան հարթությունից, **բ)** *AK* և *CD* ուղիղների հեռավորությունը:

151. *CD* ուղիղն ուղահայաց է *ABC* եռանկյան հարթությանը: Ապացուցեք, որ. **ա)** *ABC* եռանկյունը *ABD* եռանկյան պրոյեկցիան է *ABC* հարթության վրա, **բ)** եթե *CH*-ը *ABC* եռանկյան բարձրությունն է, ապա *DH*-ը՝ *ABD* եռանկյան բարձրությունը:

152. *ABCD* քառակուսու *B* գագաթով տարված է նրա հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ՝ *BF*-ը: Գտեք *F* կետի հեռավորություններն այն ուղիղներից, որոնք ընդգրկում են քառակուսու կողմերն ու անկյունագծերը, եթե $BF=8$դմ, $AB=4$դմ:

153. Ապացուցեք, որ α հարթության մեջ AM թեքի M հիմքով նրան ուղղահայաց տարված a ուղիղը ուղղահայաց է նաև նրա HM պրոյեկցիային (տե՛ս նկ. 53):

Լուծում: a ուղիղն ուղղահայաց է AMH հարթությանը, որովհետև այն ուղղահայաց է այդ հարթության երկու հատվող ուղիղներին (ըստ պայմանի՝ $a \perp AM$, և քանի որ $AH \perp \alpha$, ապա նաև $a \perp AH$): Դրանից հետևում է, որ a ուղիղն ուղղահայաց է AMH հարթության մեջ ընկած ցանկացած ուղղին, մասնավորապես՝ HM-ին. $a \perp HM$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

154. BD ուղիղն ուղղահայաց է ABC եռանկյան հարթությանը: Հայտնի է, որ BD=9սմ, AC=10սմ, $BC=BA$=13սմ: Գտեք. **ա)** D կետի հեռավորությունը AC ուղղից, **բ)** ACD եռանկյան մակերեսը:

155. ABC հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան C ուղիղ անկյան գագաթով տարված է նրա հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ՝ CM-ը: Գտեք M կետի հեռավորությունը AB ուղղից, եթե AC=4սմ, $CM=2\sqrt{7}$ սմ:

156. ABC ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկը m է, իսկ այդ էջին առընթեր սուր անկյունը՝ φ: C ուղիղ անկյան գագաթով տարված է այդ եռանկյան հարթությանն ուղղահայաց CD ուղիղը: Գտեք D կետի հեռավորությունը AB ուղղից, եթե $CD=n$:

157. OK ուղիղն ուղղահայաց է $ABCD$ շեղանկյան հարթությանը, ընդ որում՝ O-ն շեղանկյան անկյունագծերի հատման կետն է: **ա)** Ապացուցեք, որ K կետի հեռավորությունները շեղանկյան կողմերն ընդգրկող բոլոր ուղիղներից հավասար են: **բ)** Գտեք այդ հեռավորությունը, եթե OK=4.5դմ, AC=6դմ, BD=8դմ:

158. $ABCD$ շեղանկյան B գագաթով տարված է նրա հարթությանն ուղղահայաց BM ուղիղը: Գտեք M կետի հեռավորությունը շեղանկյան կողմերն ընդգրկող ուղիղներից, եթե AB=25սմ, $\angle BAD=60^{0}$, BM=12,5սմ:

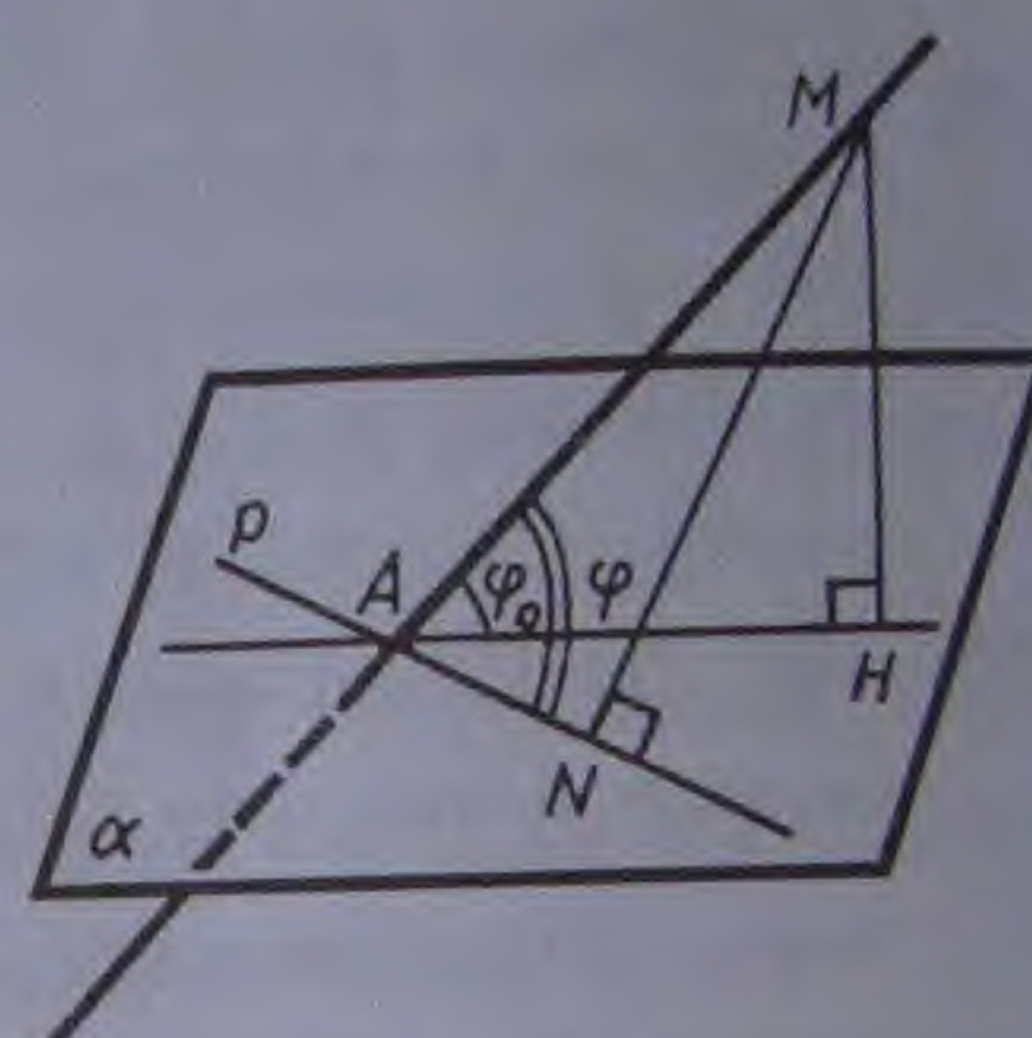
159. BM ուղիղն ուղղահայաց է $ABCD$ ուղղանկյան հարթությանը: Ապացուցեք, որ այն ուղիղը, որով հատվում են ADM և BCM հարթությունները, ուղղահայաց է ABM հարթությանը:

160. AB հատվածի ծայրակետերն ընկած են այն երկու զուգահեռ հարթությունների մեջ, որոնց միջև հեռավորությունը d է, ընդ որում՝ $d<AB$: Ապացուցեք, որ այդ հարթությունների վրա AB հատվածի պրոյեկցիաները հավասար են: Գտեք այդ պրոյեկցիաները, եթե AB=13սմ, d=5սմ:

161. *BA* ճառագայթն ընկած չէ *CBD* չփռված անկյան հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ եթե $\angle ABC=\angle ABD$, ընդ որում՝ $\angle ABC<90^0$, ապա *CBD* հարթության վրա *BA* ճառագայթի պրոյեկցիան *CBD* անկյան կիսորդն է:

162. *MA* ուղիղն անցնում է α հարթության *A* կետով և այդ հարթության հետ կազմում է $\varphi_0\neq 90^0$ անկյուն: Ապացուցեք, որ φ_0-ն փոքրագույնն է այն բոլոր անկյուններից, որոնք *MA* ուղիղը կազմում է α հարթության մեջ *A* կետով տարված ուղիղների հետ:

Լուծում: *M* կետից α հարթությանը տարված ուղղահայացի հիմքը նշանակենք *H* տառով: Դիտարկենք α հարթության կամայական *p* ուղիղ, որն անցնում է *A* կետով և տարբեր է *AH* ուղղից: *AM* և *p* ուղիղների կազմած անկյունը նշանակենք φ տառով (նկ. 57) և ապացուցենք, որ $\varphi>\varphi_0$:



Նկ. 57

M կետից տանենք *p* ուղղին ուղղահայաց՝ *MN*-ը: Եթե *N* կետը համընկնում է *A* կետին, ապա $\varphi=90^0$ և, ուրեմն, $\varphi>\varphi_0$: Քննության առնենք այն դեպքը, երբ *A* և *N* կետերը չեն համընկնում (տե՛ս նկ. 57): *AM* հատվածը *ANM* և *AHM* ուղղանկյուն եռանկյունների ընդհանուր ներքնաձիգն է: Ուրեմն՝ $\sin\varphi=\frac{MN}{AM}$, $\sin\varphi_0=\frac{MH}{AM}$: Քանի որ $MN>MH$ (*MN*-ը թեք է, *MH*-ը՝ ուղղահայաց), ապա ստացվում է, որ $\sin\varphi>\sin\varphi_0$ և, ուրեմն, $\varphi>\varphi_0$:

163. Տրված հարթությանը *A* կետից տարված *AM* թեքը հավասար է *d*: Ինչի՞ է հավասար այդ թեքի պրոյեկցիան տրված հարթության վրա, եթե *AM* ուղղի և այդ հարթության կազմած անկյունը հավասար է. **ա)** 45^0, **բ)** 60^0, **գ)** 30^0:

164. Թեքը տարված է α հարթությանը φ անկյան տակ: Գտեք φ-ն, եթե հայտնի է, որ թեքի պրոյեկցիան կրկնակի փոքր է, քան թեքը:

165. γ հարթությունից *d* հեռավորության վրա գտնվող *A* կետից այդ հարթությանը տարված են *AB* և *AC* թեքեր՝ հարթության նկատմամբ 30^0 անկյան տակ: γ հարթության վրա նրանց պրոյեկցիաները կազմում են 120^0 անկյուն: Գտեք *BC*-ն:

§ 3 Երկնիստ անկյուն: Հարթությունների ուղղահայացությունը

22 Երկնիստ անկյուն

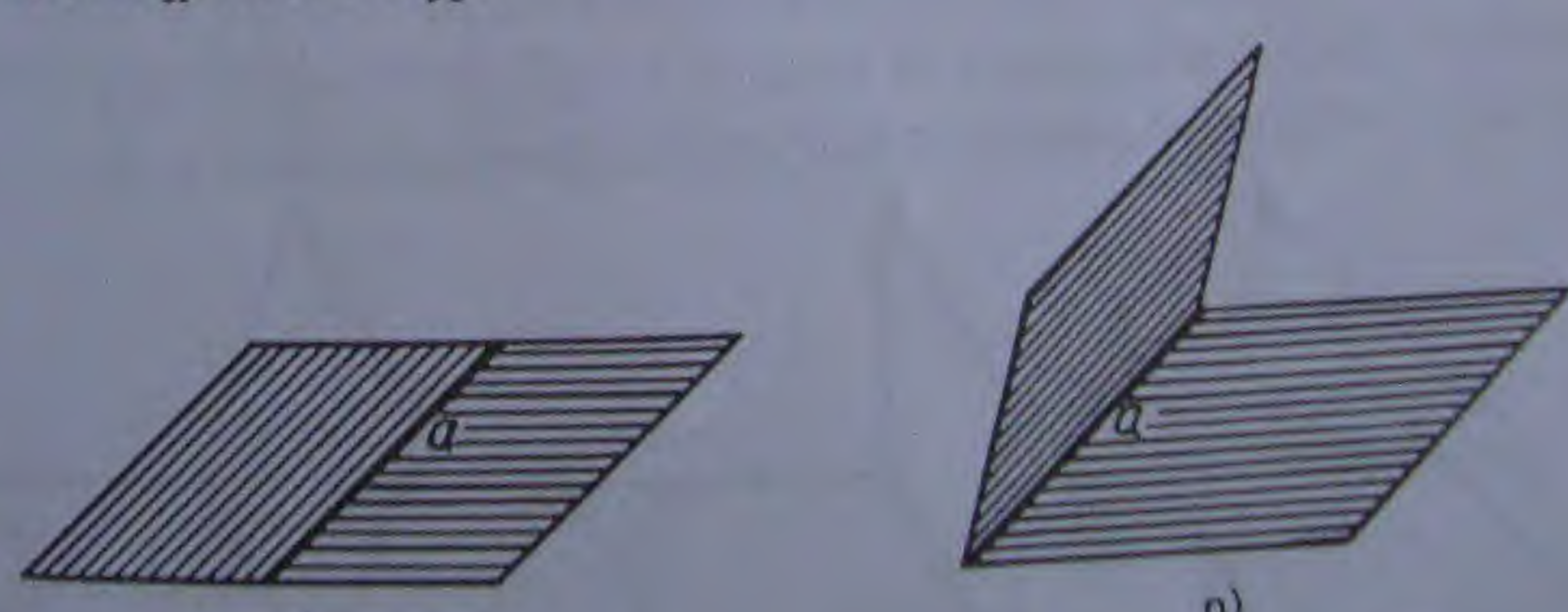
Հարթության վրա անկյուն ենք անվանել այն պատկերը, որը կազմված է մի կետից ելնող երկու ճառագայթներով: Տարածաչափության մեջ այդպիսի անկյունների հետ միասին դիտարկվում են նաև մեկ այլ տեսակ անկյուններ, որոնց անվանում են **երկնիստ անկյուններ:** Որպեսզի ներմուծենք երկնիստ անկյան հասկացությունը, վերհիշենք, որ տրված հարթության մեջ տարված ցանկացած ուղիղը այդ հարթությանը տրոհում է երկու կիսահարթությունների (նկ. 58,ա):

Պատկերացնենք, թե հարթությունը a ուղղի երկայնքով ծալել ենք այնպես, որ a սահմանագծով երկու կիսահարթություններն արդեն ընկած չեն մի հարթության մեջ (նկ. 58, բ): Ստացված պատկերն էլ հենց երկնիստ անկյուն է:

Այսպիսով՝ երկնիստ անկյունը կարելի է սահմանել հետևյալ կերպ. **երկնիստ անկյուն կոչվում է այն պատկերը, որը կազմված է a ուղղով և երկու այնպիսի կիսահարթություններով, որոնք ունեն a ընդհանուր սահմանագիծ և ընդգրկված չեն մի հարթության մեջ:**

Երկնիստ անկյուն կազմող կիսահարթությունները կոչվում են **երկնիստ անկյան նիստեր:** Երկնիստ անկյան նիստերը երկուսն են. դրանից էլ բխում է նրա անվանումը: Կիսահարթությունների ընդհանուր սահմանագիծը, այն է՝ a ուղիղը, կոչվում է **երկնիստ անկյան կող:**

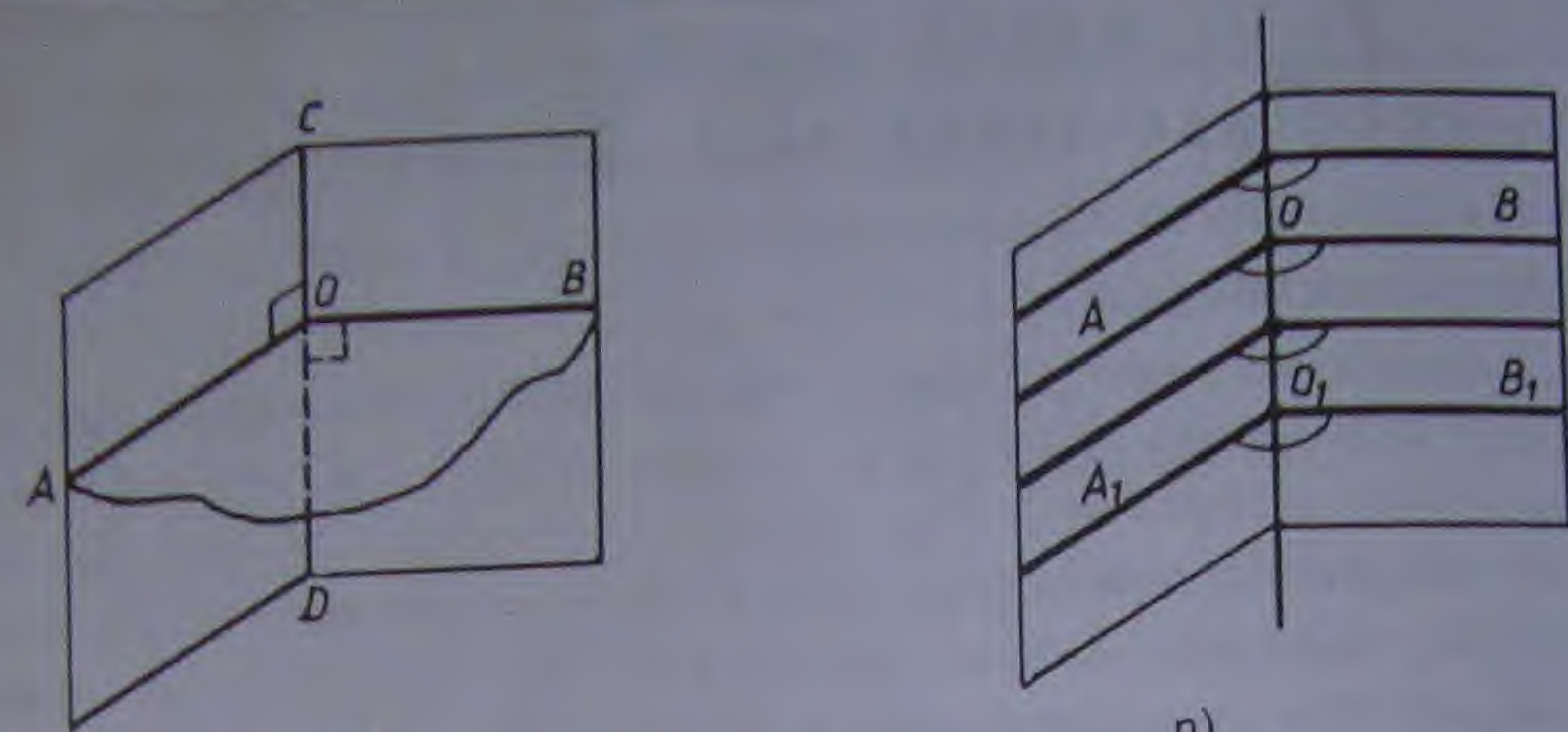
Առօրյայում մենք հաճախ ենք հանդիպում առարկաների, որոնք ունեն երկնիստ անկյան տեսք: Այդպիսի առարկաներ են շենքերի երկփեղկ կտուրները, կիսաբաց թղթապանակը, կիսաբաց դուռը՝ պատի հետ, պատը՝ հատակի հետ և այլն:



ա) a ուղիղը հարթությունը տրոհում է երկու կիսահարթության

բ) Երկնիստ անկյուն

Նկ. 58



ա) բ)

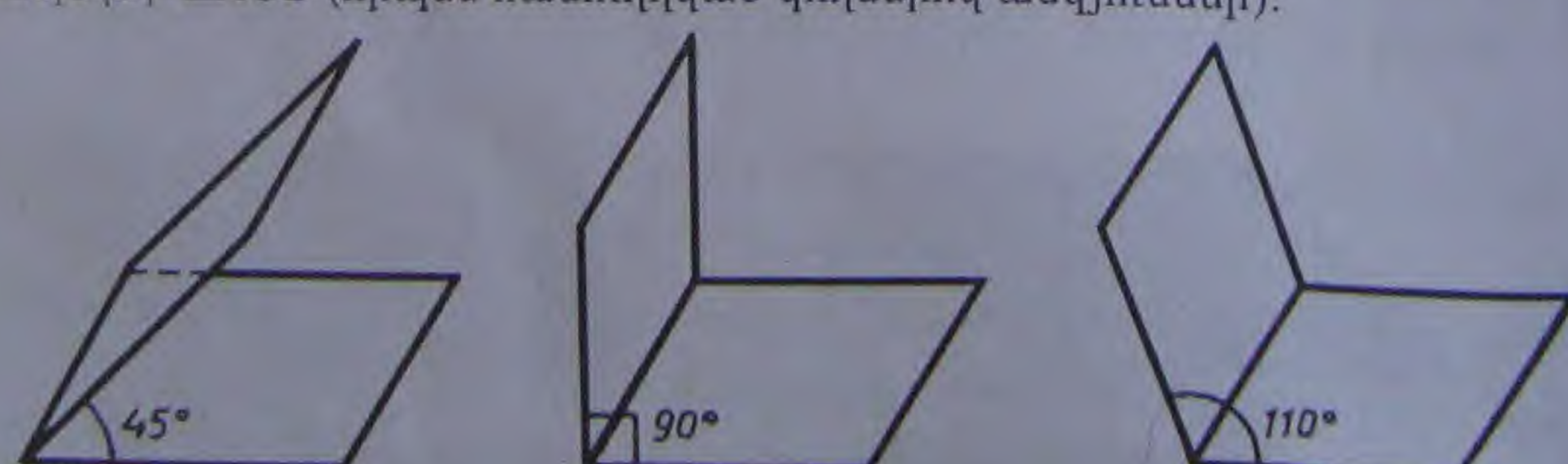
Երկնիստ անկյան գծային անկյուն

Նկ. 59

Մենք գիտենք, որ հարթության վրա անկյունները (սովորական անկյունները) չափվում են աստիճաններով: Իսկ ինչպե՞ս չափել երկնիստ անկյունները: Դա արվում է հետևյալ կերպ:

Երկնիստ անկյան կողի վրա նշենք որևէ կետ և նիստերից յուրաքանչյուրի մեջ այդ կետից տանենք կողին ուղղահայաց ճառագայթ: Այդ ճառագայթներով կազմած անկյունը կոչվում է **երկնիստ անկյան գծային անկյուն:** 59,ա նկարում անկյուն AOB-ն CD կող ունեցող երկնիստ անկյան գծային անկյուն է: Քանի որ $OA \perp CD$, և $OB \perp CD$, ապա AOB հարթությունը ուղղահայաց է CD ուղղին: Այսպիսով՝ գծային անկյան հարթությունը ուղղահայաց է երկնիստ անկյան կողին: Ակնհայտ է, որ յուրաքանչյուր երկնիստ անկյուն ունի անվերջ բազմությամբ գծային անկյուններ (նկ. 59,բ) :

Ապացուցենք, որ **երկնիստ անկյան բոլոր գծային անկյունները միմյանց հավասար են:** Դիտարկենք կամայական երկու՝ AOB և $A_1O_1B_1$ գծային անկյունները (նկ. 59,բ): OA և O_1A_1 ճառագայթներն ընկած են մի նիստի մեջ և ուղղահայաց են OO_1 ուղղին, ուրեմն՝ նրանք համուղղված են: Համանման ձևով համուղղված են նաև OB և O_1B_1 ճառագայթները: Ուրեմն՝ $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$ (որպես համուղղված կողմերով անկյուններ):



ա) բ) գ)

Նկ. 60

Երկնիստ անկյան աստիճանային չափ կոչվում է նրա գծային անկյան աստիճանային չափը: 60,ա նկարում պատկերված երկնիստ անկյան աստիճանային չափը 45^0 է: Սովորաբար ասում են համառոտ. «Երկնիստ անկյունը 45^0 է»:

Երկնիստ անկյունը կոչվում է **ուղիղ** (**սուր, կամ բութ**), եթե այն 90^0 է (փոքր է 90^0-ից, մեծ է 90^0-ից): 60,բ նկարում պատկերված է ուղիղ, 60,ա նկարում՝ սուր, իսկ 60,գ նկարում՝ բութ երկնիստ անկյուն:

23 Երկու հարթությունների ուղղահայացության հայտանիշը

Երկու հատվող հարթությունները կազմում են ընդհանուր կող ունեցող չորս երկնիստ անկյուններ (նկ. 61,ա): Եթե այդ երկնիստ անկյուններից մեկը φ է, ապա մյուս երեք անկյունները, համապատասխանաբար, 180^0-φ, φ, 180^0-φ են: Մասնավորապես՝ եթե անկյուններից մեկը ուղիղ անկյուն է ($\varphi=90^0$), ապա մյուս երեքը ևս ուղիղ անկյուն են: Եթե φ-ն չորս անկյուններից այն մեկն է, որը չի գերազանցում մյուս անկյուններից յուրաքանչյուրը, ապա ասում են, որ **հատվող հարթությունների կազմած անկյունը φ է:** Ակնհայտ է, որ $0^0<\varphi\leq90^0$:

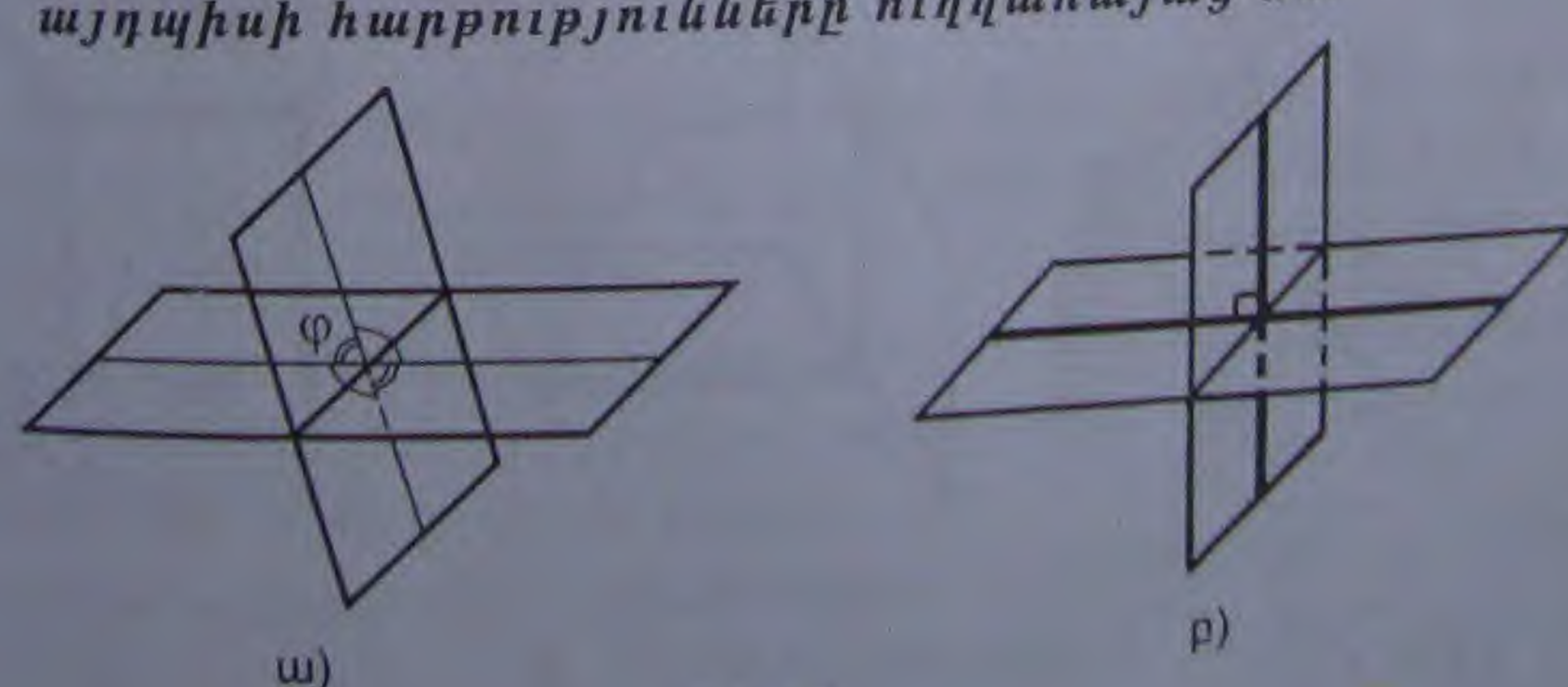
Սահմանում: ***Երկու հատվող հարթություններ կոչվում են ուղղահայաց (փոխուղղահայաց), եթե նրանց կազմած անկյունը 90^0 է*** (նկ. 61,բ):

Փոխուղղահայաց հարթությունների օրինակ են սենյակի պատերի և առաստաղի հարթությունները:

Պարզ է, որ փոխուղղահայաց հարթությունների կազմած բոլոր չորս երկնիստ անկյուններն էլ ուղիղ անկյուն են:

Քննության առնենք երկու հարթությունների ուղղահայացության հայտանիշը:

Թեորեմ: ***Եթե երկու հարթություններից մեկն անցնում է մյուս հարթությանն ուղղահայաց ուղղով, ապա այդպիսի հարթությունները ուղղահայաց են:***



ա) բ)

Նկ. 61

Ապացուցում: Դիտարկենք α և β այնպիսի հարթություններ, որ α հարթությունն անցնում է AB ուղղով, որն ուղղահայաց է β հարթությանը և այն հատում է A կետում (նկ. 62): Ապացուցենք, որ $\alpha\perp\beta$:

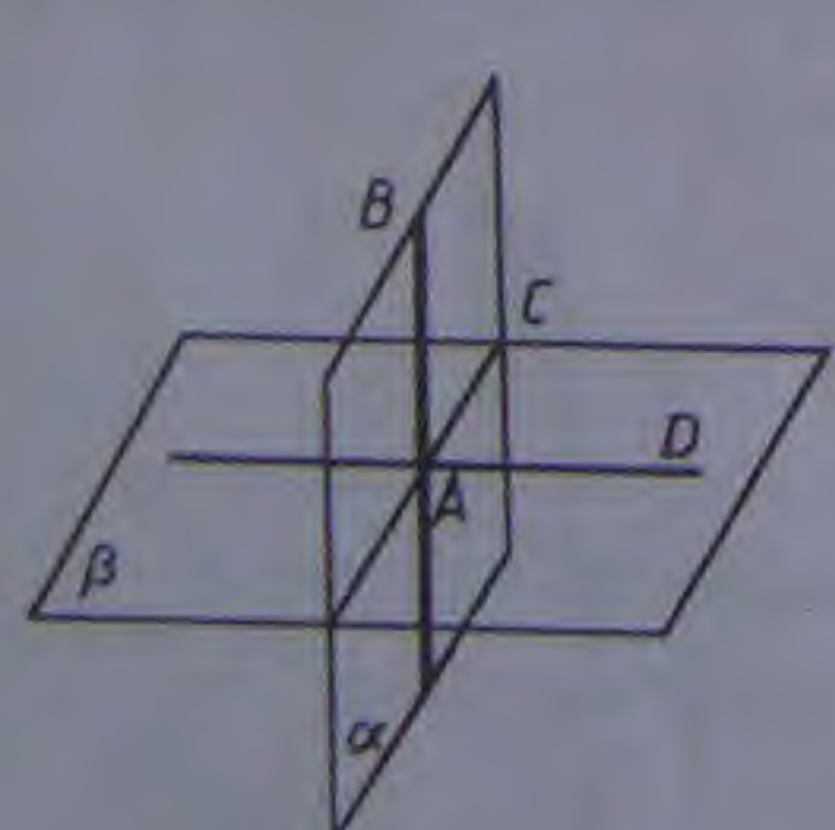
α և β հարթությունները հատվում են մի որևէ AC ուղղով, ընդ որում $AB\perp AC$, որովհետև ըստ պայմանի $AB\perp\beta$, իսկ դա նշանակում է, որ AB ուղիղն ուղղահայաց է β հարթության մեջ ընկած ցանկացած ուղղին:

β հարթության մեջ տանենք AD ուղիղը՝ ուղղահայաց AC ուղղին: Նկատենք, որ BAD անկյունը α և β հարթությունների հատմամբ առաջացած երկնիստ անկյան գծային անկյունն է: Բայց $\angle BAD=90^0$ (քանի որ $AB\perp\beta$): Հետևաբար՝ α և β հարթությունների կազմած անկյունը 90^0 է, այսինքն՝ $\alpha\perp\beta$: Թեորեմն ապացուցված է:

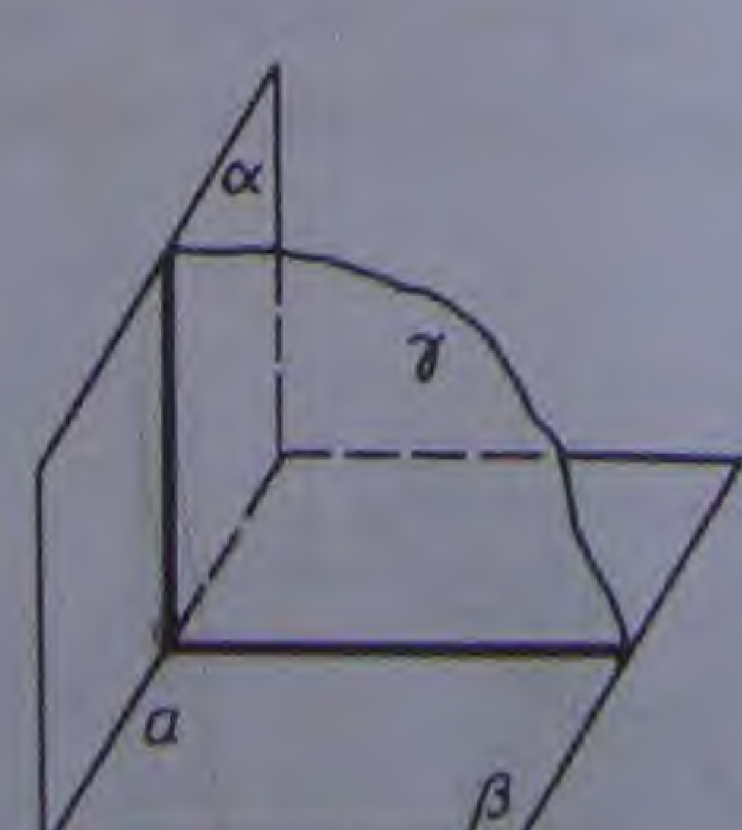
Հետևանք: ***Տրված երկու հարթությունների հատման գծին ուղղահայաց հարթությունը ուղղահայաց է այդ հարթություններից յուրաքանչյուրին*** (նկ. 63):

24 Ուղղանկյունանիստ

Զուգահեռանիստը, որի բոլոր կողմնային կողերը ուղղահայաց են հիմքին, և հիմքերը ուղղանկյուններ են, կոչվում է **ուղղանկյունանիստ** (կամ՝ **ուղղանկյուն զուգահեռանիստ**): Առարկաներից շատերը, օրինակ՝ տուփեր, արկղեր, սենյակներ և այլն, ունեն ուղղանկյունանիստի տեսք: Նկար 64-ում պատկերված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստը: Որպես հիմքեր են վերցված $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունները, իսկ AA_1, BB_1, CC_1 և DD_1 կողմնային կողերը ուղղահայաց են հիմքերին: Դրանից հետևում է, որ $AA_1\perp AB$, այսինքն AA_1B_1B կողմնային նիստը ուղղանկյուն է: Նույն բանը կարելի է ասել մյուս կողմնային նիստերի համար: Այսպիսով՝ մենք հիմնավորեցինք ուղղանկյունանիստի հետևյալ հատկությունը.

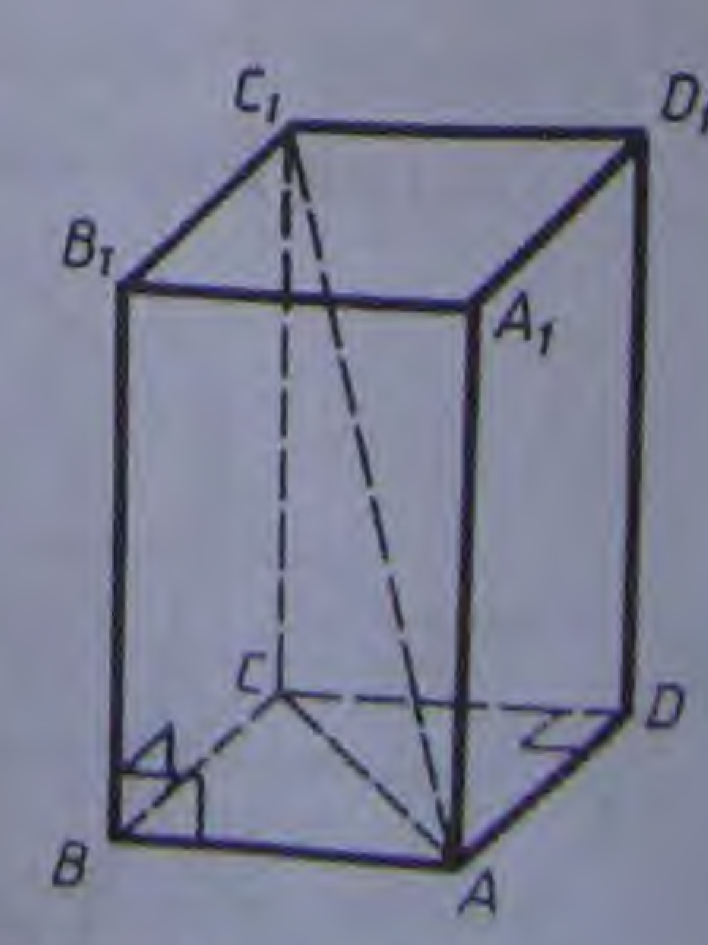


Նկ. 62



Եթե $\gamma\perp a$, ապա $\gamma\perp\alpha$ և $\gamma\perp\beta$

Նկ. 63



Ուղղանկյունանիստ

Նկ. 64

1°. *Ուղղանկյունանիստի բոլոր վեց նիստերը ուղղանկյուններ են:*

Զուգահեռանիստի կից նիստերը պարունակող կիսահարթությունները կազմում են երկնիստ անկյուններ, որոնք կոչվում են **զուգահեռանիստի երկնիստ անկյուններ:**

Ուղղանկյունանիստի հետևյալ հատկությունը ապացուցեք ինքնուրույն:

2°. *Ուղղանկյունանիստի բոլոր երկնիստ անկյունները ուղիղ անկյուն են:*

Այժմ դիտարկենք ուղղանկյունանիստի առավել նշանակալի հատկություններից մեկը.

Ընդհանուր գագաթով երեք կողերի երկարությունները անվանենք ուղղանկյունանիստի **չափումներ:** Օրինակ, նկար 64-ում պատկերված ուղղանկյունանիստի չափումներ կարելի է վերցնել AB, AD և AA_1 կողերի երկարությունները:

Գործնական առումով ուղղանկյունանիստի ձև ունեցող սենյակի մասին խոսելիս «չափումներ» բառի փոխարեն առօրյայում, սովորաբար, ասում են սենյակի «երկարություն», «լայնություն», «բարձրություն» բառերը: Պարզ է, որ սենյակի երկարությունը, լայնությունը և բարձրությունն էլ հենց նրա չափումներն են:

Նախքան կծնակերպենք ուղղանկյունանիստի՝ չափումների հետ կապված հատկությունը, վերհիշենք, որ ուղղանկյան անկյունագծի քառակուսին հավասար է նրա կից կողմերի քառակուսիների գումարին:

Ուղղանկյան կից կողմերի երկարությունները կարելի է անվանել ուղղանկյան չափումներ, և, ուրեմն, **ուղղանկյան անկյունագծի քառակուսին հավասար է նրա երկու չափումների քառակուսիների գումարին:** Պարզվում է, որ համանման հատկությամբ օժտված է նաև ուղղանկյունանիստը:

Թ ե ո ր ե մ : ***Ուղղանկյունանիստի անկյունագծի քառակուսին հավասար է նրա երեք չափումների քառակուսիների գումարին:***

Ա պ ա ց ու ց ու մ : Դիտենք նկար 64-ը և նրանում պատկերված $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստի համար ապացուցենք, որ $AC_1^2=AB^2+AD^2+AA_1^2$:

Քանի որ CC_1 կողն ուղղահայաց է $ABCD$ հիմքին, ապա $\angle ACC_1$-ը ուղիղ անկյուն է: ACC_1 ուղղանկյուն եռանկյունից, ըստ Պյութագորասի թեորեմի, ստանում ենք $AC_1^2=AC^2+CC_1^2$:

Բայց AC-ն $ABCD$ ուղղանկյան անկյունագիծն է, ուրեմն՝ $AC^2=AB^2+AD^2$: Բացի այդ՝ $CC_1=AA_1$: Հետևաբար՝ $AC_1^2=AB^2+AD^2+AA_1^2$: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք։ ***Ուղղանկյունանիստի անկյունագծերը հավասար են։***

Ուղղանկյունանիստը, որի բոլոր երեք չափումները հավասար են, կոչվում է **խորանարդ։** Խորանարդի բոլոր նիստերը միմյանց հավասար քառակուսիներ են*։

Խնդիրներ**

166. Ոչ ուղղահայաց հարթություններ α-ն և β-ն հատվում են MN ուղղով։ β հարթության մեջ A կետից տարված է MN ուղղին ուղղահայաց՝ AB-ն, և նույն A կետից տարված է α հարթությանը ուղղահայաց՝ AC-ն։ Ապացուցեք, որ $\angle ABC$-ն $AMNC$ երկնիստ անկյան գծային անկյունն է։

167. $DABC$ քառանիստի բոլոր կողերը հավասար են, իսկ AC կողի միջնակետը M կետն է։ Ապացուցեք, որ $\angle DMB$-ն $BACD$ երկնիստ անկյան գծային անկյունն է։

168. Երկնիստ անկյունը φ է։ Այդ անկյան նիստերից մեկի վրա ընկած է մի կետ, որը գտնվում է մյուս նիստի հարթությունից d հեռավորության վրա։ Գտեք այդ կետի հեռավորությունը երկնիստ անկյան կողից։

169. Տրված են երկու երկնիստ անկյուններ, որոնց նիստերից մեկն ընդհանուր է, իսկ մյուս երկու նիստերը միևնույն հարթության տարբեր կիսահարթություններ են։ Ապացուցեք, որ այդ երկնիստ անկյունների գումարը 180^0 է։

170. ABC եռանկյան AC կողմն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ B գագաթից այդ հարթությանը տարված է ուղղահայաց՝ BB_1-ը։ Գտեք B կետի հեռավորությունները AC ուղղից և α հարթությունից, եթե AB=2սմ, $\angle BAC=150^0$, և $BACB_1$ երկնիստ անկյունը 45^0 է։

171. Հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ էջը այդ հարթության նկատմամբ թեքված է 30^0 անկյան տակ։ Գտեք α հարթության և եռանկյան հարթության կազմած անկյունը։

172. C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյան AC էջն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ α և ABC հարթությունների կազմած անկյունը 60^0 է։ Գտեք B կետի հեռավորությունը α հարթությունից, եթե AC=5սմ, AB=13սմ։

---

* Ուշագրավ է հետևյալ փաստը. նկատի ունենալով միմյանց հավասար վեց նիստեր (երեսներ) ունենալը՝ հայկական հին դասագրքերում խորանարդն անվանել են *վեցերես*, որի ցայտուն օրինակ է զառը։

** Այս պարագրաֆի խնդիրներում AB կող ունեցող երկնիստ անկյունը, որի տարբեր նիստերի վրա նշված են C և D կետեր, համառոտագրելու համար կանվանենք «CABD երկնիստ անկյուն»։

173. $ABCD$ քառանիստի CD կողն ուղղահայաց է ABC հարթությանը, $AB=BC=AC=6$, $BD=3\sqrt{7}$: Գտեք $DACB$, $DABC$, $BDCA$ երկնիստ անկյունները:

174. Գտեք $ABCD$ քառանիստի $ABCD$ երկնիստ անկյունը, եթե DAB, DAC և ACB անկյուններն ուղիղ անկյուն են, $AC=CB=5$, $BD=5\sqrt{5}$:

175. Ապացուցեք, որ եթե քառանիստի բոլոր կողերը հավասար են, ապա հավասար են նաև նրա բոլոր երկնիստ անկյունները: Գտեք այդ անկյունները:

176. $ABCD$ շեղանկյան AD կողմով տարված է ADM հարթությունն այնպես, որ $BADM$ երկնիստ անկյունը 60^0 է: Գտեք շեղանկյան կողմը, եթե $\angle BAD=45^0$, և B կետի հեռավորությունը ADM հարթությունից $4\sqrt{3}$ է:

177. Ապացուցեք, որ այն հարթությունը, որն ուղղահայաց է տրված երկու հարթությունների հատման ուղղին, ուղղահայաց է այդ հարթություններից յուրաքանչյուրին:

178. α և β փոխուղղահայաց հարթությունները հատվում են c ուղղով: Ապացուցեք, որ α հարթության ցանկացած ուղիղ, որն ուղղահայաց է c ուղղին, ուղղահայաց է β հարթությանը:

Լուծում: α հարթության մեջ տանենք կամայական AC ուղիղ, որն ուղղահայաց է c ուղղին, ընդ որում՝ $C\in c$: Ապացուցենք, որ $CA\perp\beta$:

β հարթության մեջ C կետով տանենք CB ուղիղը՝ ուղղահայաց c ուղղին: Քանի որ $CA\perp c$ և $CB\perp c$, ապա $\angle ACB$-ն α և β հարթություններով կազմած երկնիստ անկյուններից մեկի գծային անկյունն է: Ըստ խնդրի պայմանի $\alpha\perp\beta$, ուրեմն՝ $\angle ACB$-ն ուղիղ անկյուն է, այսինքն՝ $CA\perp CB$: Այսպիսով՝ CA ուղիղն ուղղահայաց է β հարթության երկու հատվող ուղիղներին՝ c-ին և CB-ին, հետևաբար՝ $CA\perp\beta$:

179. α և β հարթությունները փոխուղղահայաց են: α հարթության ինչ-որ կետով տարված է β հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ: Ապացուցեք, որ այդ ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ:

180. Ապացուցեք, որ միևնույն հարթությանը ուղղահայաց հարթությունն ու դրա մեջ չընկած ուղիղը զուգահեռ են:

181. α և β հարթությունները հատվում են a ուղղով: M կետից տարված են α և β հարթություններին ուղղահայացներ՝ համապատասխանաբար MA-ն և MB-ն: a ուղիղը C կետում հատում է AMB հարթությունը: Ապացուցեք, որ $MC\perp a$:

182. α և β հարթությունները փոխուղղահայաց են և հատվում են a ուղղով: M կետից տարված են այդ հարթություններին ուղղահայացներ՝ MA-ն և MB-ն: a ուղիղը C կետում հատում է AMB հարթությունը: **ա)** Ապացուցեք, որ $ACBM$ քառանկյունը ուղղանկյուն է: **բ)** Գտեք M կետի հեռավորությունը a ուղղից, եթե $AM=m$, $BM=n$:

183. α և β հարթությունները հատվում են a ուղղով և ուղղահայաց են γ հարթությանը: Ապացուցեք, որ a ուղիղն ուղղահայաց է γ հարթությանը:

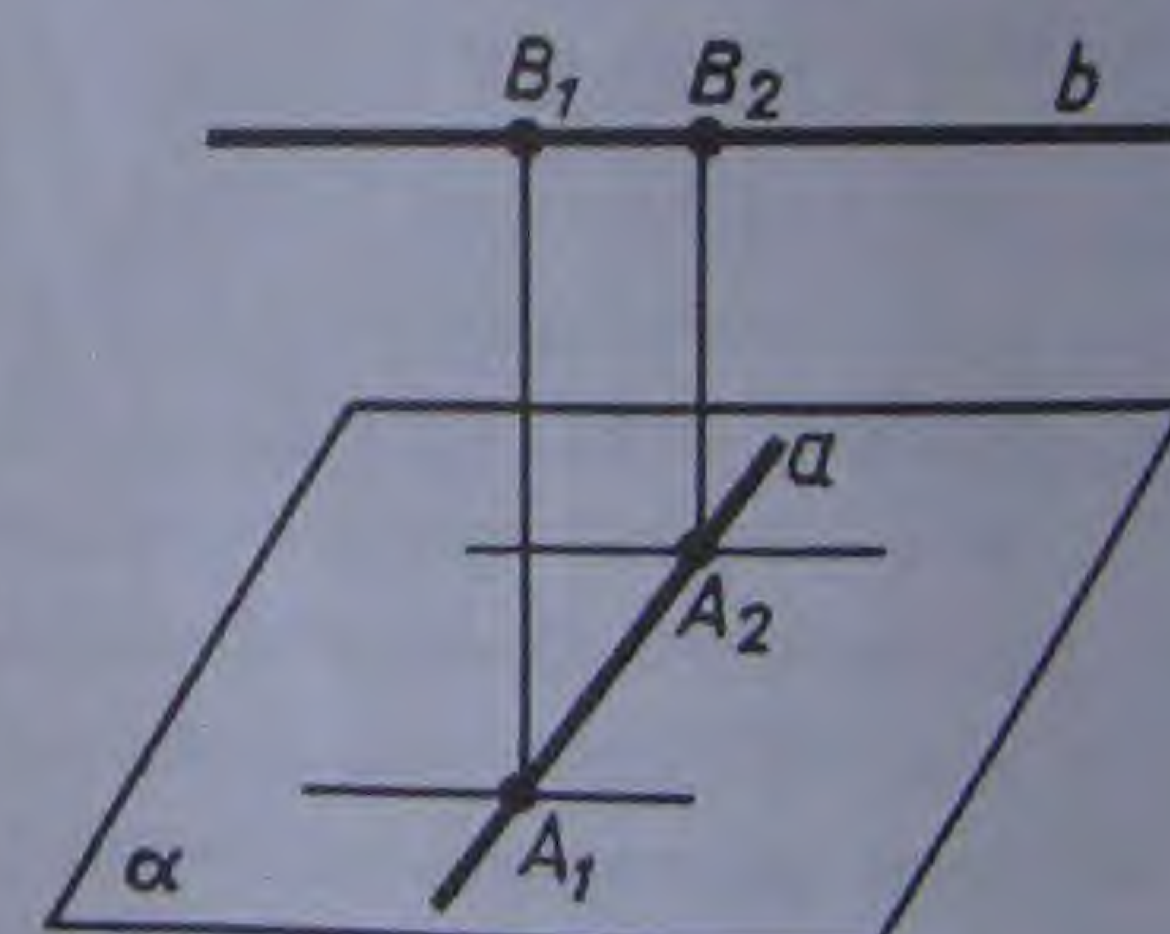
184. ABC և ABD եռանկյունների AB ընդհանուր կողմը 10սմ է: Այդ եռանկյունների հարթությունները փոխուղղահայաց են: Գտեք CD-ն, եթե եռանկյունները՝ **ա)** հավասարակողմ են, **բ)** ուղղանկյուն հավասարասրուն են, և AB-ն ներքնաձիգ է:

185. a ուղիղն ուղղահայաց չէ α հարթությանը: Ապացուցեք, որ գոյություն ունի հարթություն, որն անցնում է a ուղղով և ուղղահայաց է α հարթությանը:

Լուծում: a ուղղի կամայական M կետով տանենք α հարթությանն ուղղահայաց p ուղիղ: Դիտարկենք a և p ուղիղներով անցնող β հարթությունը: β-ն որոնելի հարթությունն է, որովհետև այն անցնում է a ուղղով և, ըստ երկու հարթությունների ուղղահայացության հայտանիշի, ուղղահայաց է α հարթությանը:

186. Ապացուցեք, որ գոյություն ունի ուղիղ, ընդ որում միակը, որը հատում է տրված երկու՝ a և b խաչվող ուղիղները և ուղղահայաց է դրանցից յուրաքանչյուրին:

Լուծում: Դիտարկենք a ուղղով անցնող և b ուղղին զուգահեռ α հարթությունը: a և b ուղիղներով տանենք β և γ հարթությունները այնպես, որ $\beta \perp \alpha$ և $\gamma \perp \alpha$ (խնդիր 185): β և γ հարթությունները հատվում են մի որևէ p ուղղով: Ինքնուրույն ապացուցեք, որ այդ p ուղիղը որոնելին է:



Նկ. 65

Ապացուցենք, որ p-ն միակ ուղիղն է, որ բավարարում է խնդրի պայմաններին: Ենթադրենք, թե գոյություն ունեն երկու ուղիղներ՝ A_1B_1-ը և A_2B_2-ը, որոնք հատում են տրված a և b խաչվող ուղիղները և ուղղահայաց են դրանցից յուրաքանչյուրին (նկ. 65): A_1B_1 և A_2B_2 ուղիղները ուղղահայաց են α հարթությանը (պարզաբանեք, թե ինչու), ուրեմն՝ իրենք զուգահեռ են: Դրանից հետևում է, որ a և b խաչվող ուղիղներն ընկած են մի հարթության մեջ, ինչը հակասում է խաչվող ուղիղների սահմանմանը:

187. Գտեք ուղղանկյունանիստի անկյունագծերը, եթե նրա չափումներն են. **ա)** 1, 1, 2, **բ)** 8, 9, 12, **գ)** $\sqrt{39}$, 7, 9:

188. Խորանարդի կողը a է: Գտեք խորանարդի անկյունագիծը:

189. Գտեք խորանարդի գագաթի հեռավորությունը նրա ցանկացած նիստի հարթությունից, որի մեջ այդ գագաթն ընկած չէ, եթե. **ա)** խորանարդի նիստի անկյունագիծը m է, **բ)** խորանարդի անկյունագիծը d է:

190. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: Գտեք հետևյալ երկնիստ անկյունները. **ա)** ABB_1C, **բ)** ADD_1B, **գ)** A_1BB_1K, որտեղ K-ն A_1D_1 կողի միջնակետն է:

191. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: Ապացուցեք, որ ABC_1 և A_1B_1D հարթությունները ուղղահայաց են:

192. Գտեք խորանարդի անկյունագծի և նիստերից մեկի հարթության կազմած անկյան տանգենսը:

193. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստում տրված է. $D_1B=d$, $AC=m$, $AB=n$: Գտեք հեռավորությունը. **ա)** A_1C_1 ուղղի և ABC հարթության, **բ)** ABB_1 և DCC_1 հարթությունների, **գ)** DD_1 ուղղի և ACC_1 հարթության:

194. Խորանարդի կողը a է: Գտեք այն խաչվող ուղիղների հեռավորությունը, որոնք ընդգրկում են. **ա)** խորանարդի անկյունագիծը և խորանարդի կողը, **բ)** խորանարդի անկյունագիծը և խորանարդի նիստի անկյունագիծը:

195. Գտեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստի չափումները, եթե $AC_1=12$սմ, և BD_1 անկյունագիծը կազմում է AA_1D_1D նիստի հարթության հետ 30^0 անկյուն, իսկ DD_1 կողի հետ՝ 45^0 անկյուն:

196. Պատկերեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդ և կառուցեք նրա հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է՝ **ա)** AA_1 կողով և ուղղահայաց է BB_1D_1 հարթությանը, **բ)** AB կողով և ուղղահայաց է CDA_1 հարթությանը:

Հարցեր գլուխ II-ի վերաբերյալ

1. Արդյոք ճշմարի՞տ է պնդումը. եթե տարածության մեջ երկու ուղիղներ ուղղահայաց են երրորդ ուղղին, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են: Այդ պնդումը ճշմարի՞տ է, արդյոք, պայմանով, որ այդ երեք ուղիղները ընկած են մի հարթության մեջ:
2. b և c զուգահեռ ուղիղներն ընկած են α հարթության մեջ, իսկ a ուղիղն ուղղահայաց է b ուղղին: Արդյոք ճշմարի՞տ է պնդումն այն, որ. **ա)** a ուղիղն ուղղահայաց է c ուղղին, **բ)** a ուղիղը հատում է α հարթությունը:
3. a ուղիղն ուղղահայաց է α հարթությանը, իսկ b ուղիղը այդ հարթությանը ուղղահայաց չէ: a և b ուղիղները կարո՞ղ են, արդյոք, լինել զուգահեռ:
4. a ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը, իսկ b ուղիղն ուղղահայաց է այդ հարթությանը: Արդյոք ճշմարի՞տ է պնդումը, որ a և b ուղիղները փոխուղղահայաց են:

5. a ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը, իսկ b ուղիղն ուղղահայաց է այդ հարթությանը: Գոյություն ունի՞, արդյոք, ուղիղ՝ ուղղահայաց a և b ուղիղներին:
6. Արդյոք ճշմարի՞տ է պնդումը, որ բոլոր այն ուղիղները, որոնք ուղղահայաց են տրված հարթությանը և հատում են տրված ուղիղը, ընկած են մի հարթության մեջ:
7. Երկու հարթություններից յուրաքանչյուրն ուղղահայաց է երրորդ հարթությանը: Այդ երկու հարթությունները կարո՞ղ են, արդյոք, լինել. ա) զուգահեռ հարթություններ, բ) ուղղահայաց հարթություններ:
8. Կարելի՞ է, արդյոք, տարածության կետով տանել երեք հարթություններ այնպես, որ յուրաքանչյուր երկուսը լինեն փոխուղղահայաց:
9. Քառակուսու անկյունագիծն ուղղահայաց է մի որևէ հարթության: Քառակուսու մյուս անկյունագիծը ինչպե՞ս է դասավորված այդ հարթության նկատմամբ:
10. Քանի՞ երկնիստ անկյուն ունի. **ա)** քառանիստը, **բ)** զուգահեռանիստը:

Լրացուցիչ խնդիրներ

197. BM հատվածն ուղղահայաց է $ABCD$ ուղղանկյան հարթությանը: Ապացուցեք, որ CD ուղիղն ուղղահայաց է MBC հարթությանը:

198. A կետն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ B կետի հեռավորությունն այդ հարթությունից 9սմ է: M կետով AB հատվածը տրոհվում է 4:5 հարաբերությամբ՝ հաշված A կետից: Գտեք M կետի հեռավորությունը α հարթությունից:

199. S կետը հավասարահեռ է ուղղանկյուն եռանկյան գագաթներից և ընկած չէ այդ եռանկյան հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ SM ուղիղը, որտեղ M-ը ներքնաձիգի միջնակետն է, ուղղահայաց է եռանկյան հարթությանը:

200. Ապացուցեք, որ բազմանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնով անցնող և բազմանկյան հարթությանն ուղղահայաց ուղղի ցանկացած կետը հավասարահեռ է այդ բազմանկյան գագաթներից:

201. Գտեք AB և PQ խաչվող ուղիղների կազմած անկյունը, եթե P և Q կետերը հավասարահեռ են AB հատվածի ծայրակետերից:

202. Կետը գտնվում է ուղղանկյուն եռանկյան յուրաքանչյուր գագաթից 10սմ հեռավորության վրա: Այդ կետը ի՞նչ հեռավորության վրա է գտնվում եռանկյան հարթությունից, եթե եռանկյան ներքնաձիգին տարված միջնագիծը 5սմ է:

203. ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի O կենտրոնով տարված է OK ուղիղը, որն ուղղահայաց է եռանկյան հարթությանը: Գտեք K կետի հեռավորությունները եռանկյան կողմերից, եթե $AB=BC=10$սմ, $AC=12$սմ, $OK=4$սմ:

204. OM ուղիղն ուղղահայաց է ABC կանոնավոր եռանկյան հարթությանը և անցնում է այդ եռանկյան O կենտրոնով. $OM=a$, $\angle MCO=\varphi$: Գտեք. **ա)** M կետի հեռավորությունը ABC եռանկյան յուրաքանչյուր գագաթից և AB, BC, CA ուղիղներից, **բ)** ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի երկարությունը, **գ)** ABC եռանկյան մակերեսը:

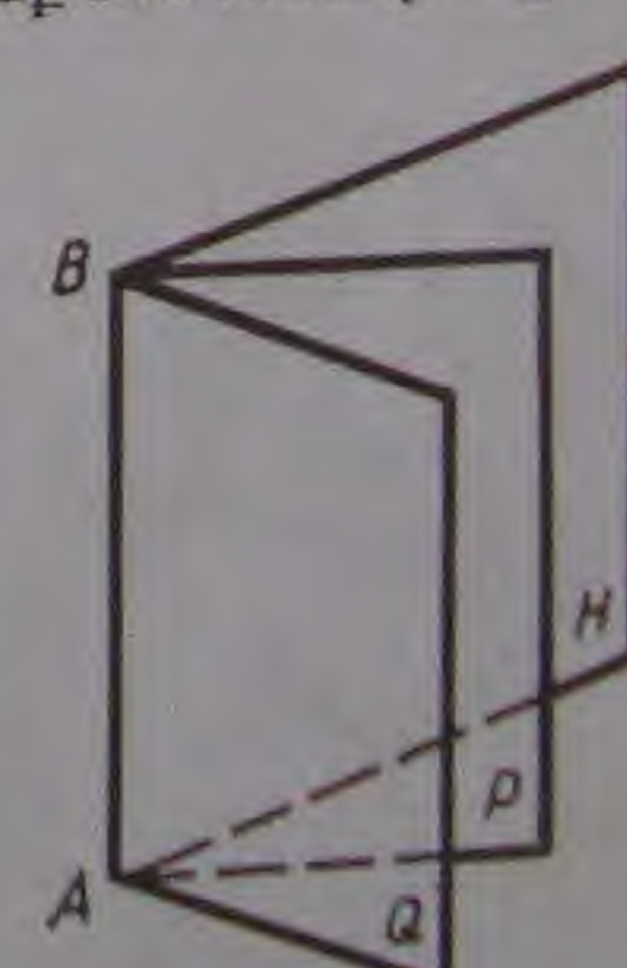
205. ABC ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան C գագաթով տարված է CD ուղիղը, որն ուղղահայաց է այդ եռանկյան հարթությանը: Գտեք ABD եռանկյան մակերեսը, եթե $CA=3$դմ, $CB=2$դմ, $CD=1$դմ:

206. Եռանկյան կողմերն են 17սմ, 15սմ և 8սմ: Եռանկյան փոքր անկյան A գագաթով տարված է AM ուղիղը, որն ուղղահայաց է նրա հարթությանը: Որոշեք M կետի հեռավորությունն այն ուղղից, որն ընդգրկում է եռանկյան փոքր կողմը, եթե հայտնի է, որ $AM=20$սմ:

207. ABC եռանկյան մեջ տրված է. $AB=BC=13$սմ, $AC=10$սմ: M կետը գտնվում է AB, BC և AC ուղիղներից $8\frac{2}{3}$սմ հեռավորության վրա: Գտեք M կետի հեռավորությունը ABC հարթությունից, եթե նրա պրոյեկցիան այդ հարթության վրա ընկած է եռանկյան ներսում:

208. α հարթությունից 9սմ հեռավորության վրա գտնվող K կետից տարված են α հարթությանը երկու թեքեր՝ KL-ը և KM-ը, որոնք միմյանց հետ կազմում են ուղիղ անկյուն, իսկ α հարթության հետ, համապատասխանաբար՝ 45^0 և 30^0 անկյուններ: Գտեք LM հատվածը:

209. AB և AC հավասար հատվածներն A կետով անցնող α հարթության հետ կազմում են, համապատասխանաբար, 40^0 և 50^0 անկյուններ: Համեմատեք B և C կետերի հեռավորությունները α հարթությունից:



Նկ. 66

210. Նկար 66-ում $HABP$ և $PABQ$ երկնիստ անկյունները հավասար են: Ապացուցեք, որ ABP հարթության յուրաքանչյուր կետ հավասարահեռ է ABH և ABQ հարթություններից:

211. KDM կանոնավոր եռանկյան և $KMNP$ քառակուսու հարթությունները փոխուղղահայաց են: Գտեք DN-ը, եթե $KM=a$:

212. C կետը D կետի պրոյեկցիան է ABC եռանկյան հարթության վրա: Ապացուցեք, որ ABD եռանկյան մակերեսը հավասար է $\frac{S}{\cos\alpha}$, որտեղ S-ը ABC եռանկյան մակերեսն է, իսկ α-ն ABC և ABD հարթությունների կազմած անկյունը:

213. ABC և DBC կանոնավոր եռանկյունները դասավորված են այնպես, որ D գագաթը պրոյեկտվում է ABC եռանկյան կենտրոնին: Հաշվեք այդ եռանկյունների հարթությունների կազմած անկյունը:

214. $ABCD$ ուղղանկյան պրոյեկցիան α հարթության վրա ABC_1D_1 քառակուսին է: Հաշվեք α հարթության և $ABCD$ ուղղանկյան հարթության կազմած φ անկյունը, երբ $AB:BC=1:2$:

215. AB և CD զուգահեռ ուղիղներն ընկած են 60^0-ի երկնիստ անկյան տարբեր նիստերում: A և D կետերը գտնվում են երկնիստ անկյան կողից համապատասխանաբար 8սմ և 6,5սմ հեռավորության վրա: Գտեք AB և CD ուղիղների հեռավորությունը:

216. A և B կետերն ընկած են 120^0-ի երկնիստ անկյան կողի վրա: AC և BD հատվածները տարված են տարբեր նիստերում և ուղղահայաց են երկնիստ անկյան կողին: Գտեք CD հատվածը, եթե $AB=AC=BD=a$:

217. Ուղղանկյունանիստի՝ ընդհանուր գագաթ ունեցող երեք նիստերի մակերեսների գումարը $404дм^2$ է, իսկ նրա կողերը համեմատական են 3, 7 և 8 թվերին: Գտեք ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը:

ԳԼՈՒԽ III

ԲԱԶՄԱՆԻՍՏԵՐ

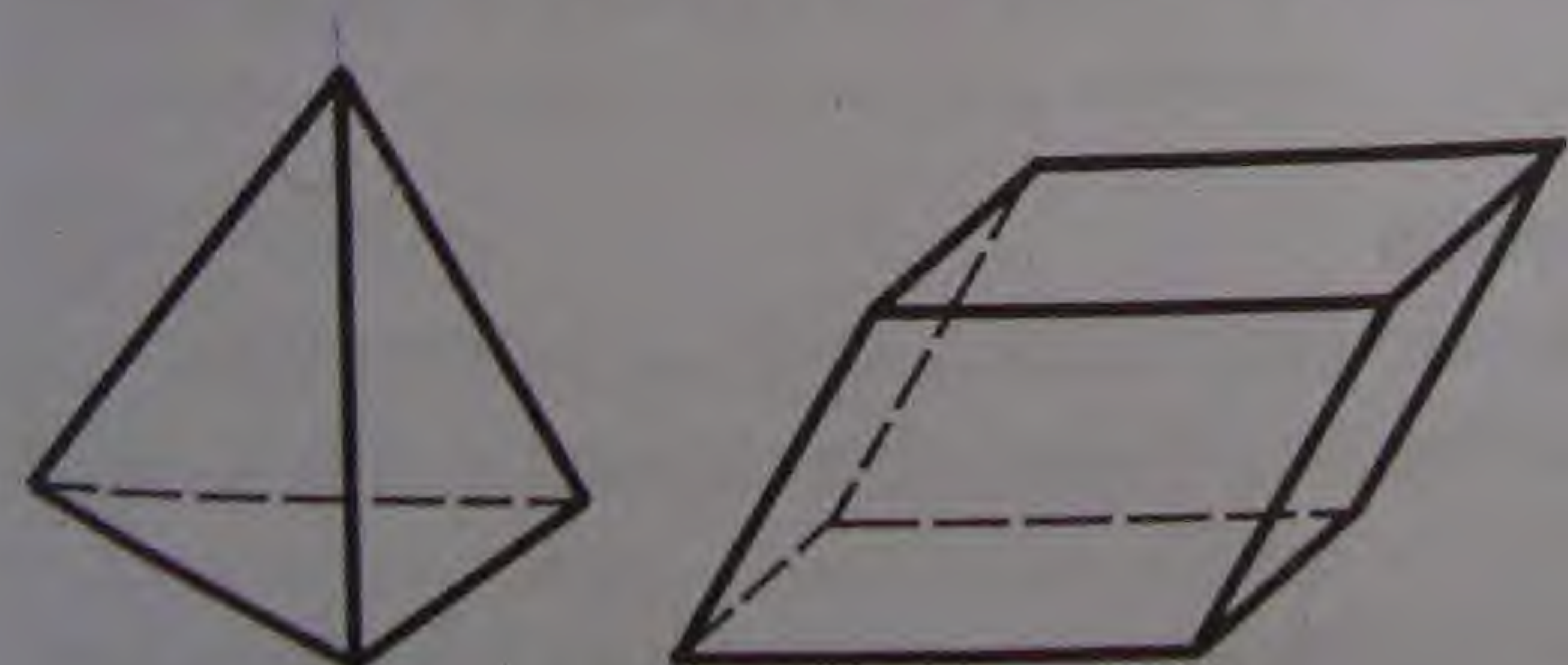
§ 1 Բազմանիստի հասկացությունը: Պրիզմա

25 Բազմանիստի հասկացությունը

Գլուխ I-ում մենք դիտարկեցինք քառանիստը և զուգահեռանիստը. քառանիստը չորս եռանկյուններից կազմված մակերևույթ է (նկ. 67,ա), զուգահեռանիստը՝ վեց զուգահեռագծերից կազմված մակերևույթ (նկ. 67,բ): Այդ մակերևույթներից յուրաքանչյուրը սահմանափակում է մի որևէ երկրաչափական մարմին, այդ մարմինը սահմանազատում է տարածության մնացած մասից:

Այն մակերևույթը, որ կազմված է վերջավոր թվով բազմանկյուններից և սահմանափակում է որևէ երկրաչափական մարմին, կանվանենք **բազմանիստ մակերևույթ** կամ **բազմանիստ:** Բազմանիստի օրինակ են քառանիստը և զուգահեռանիստը: Նկար 68-ում պատկերված է ևս մեկ բազմանիստ՝ **ութանիստը:** Այն կազմված է ութ եռանկյուններից: Բազմանիստով սահմանափակված մարմինը հաճախ նույնպես անվանում են բազմանիստ:

Բազմանկյունները, որոնցով կազմված է բազմանիստը, կոչվում են բազմանիստի **նիստեր***: Քառանիստի և ութանիստի նիստերը եռանկյուններ են (նկ. 67,ա և 68), զուգահեռանիստի նիստերը՝ զուգահեռագծեր (նկ. 67,բ): Նիստերի կողմերը կոչվում են բազմանիստի **կողեր,** իսկ կողերի



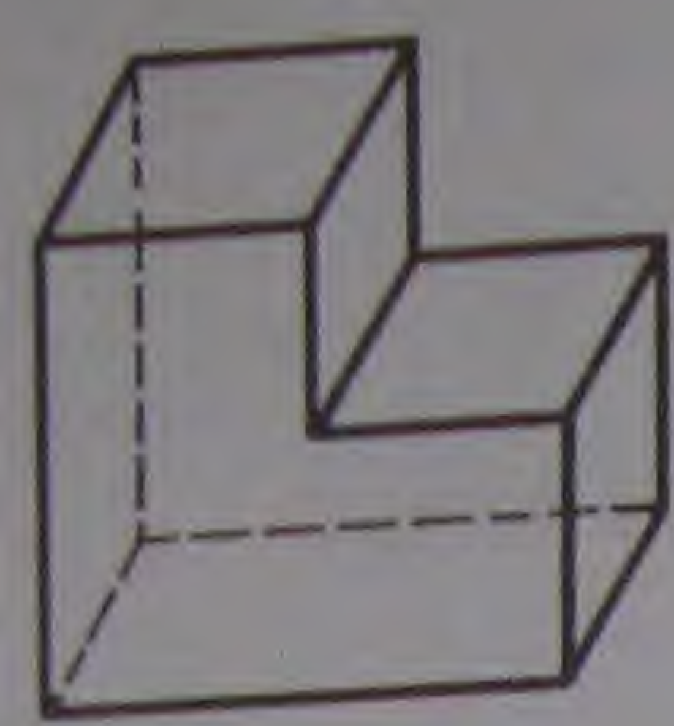
ա) Քառանիստ   բ) Զուգահեռանիստ

Նկ. 67

Ութանիստ

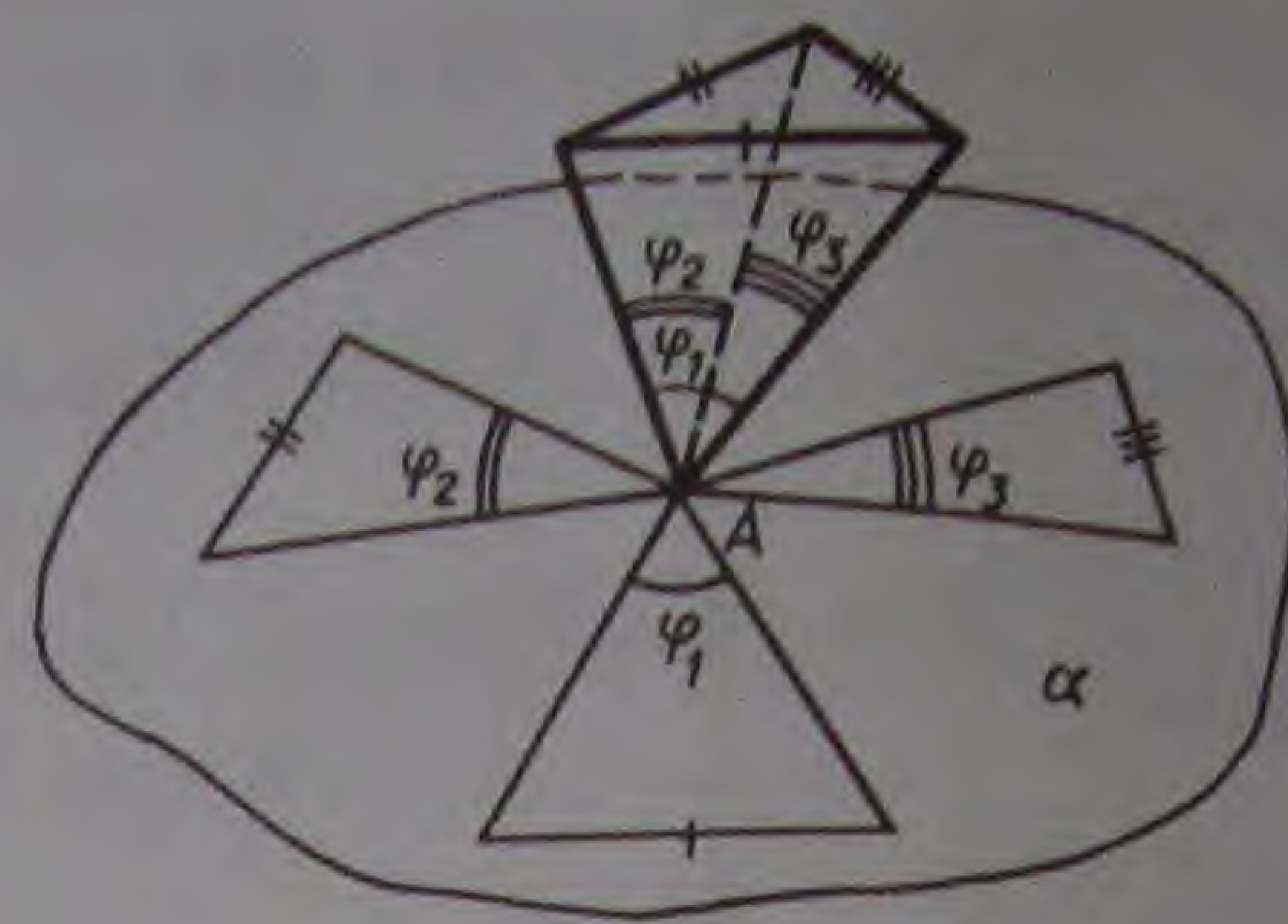
Նկ. 68

* Ընդ որում՝ ենթադրվում է, որ բազմանիստի ոչ մի հարևան երկու նիստեր ընկած չեն միևնույն հարթության մեջ:



Ոչ ուռուցիկ բազմանիստ

Նկ. 69



$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3<360^0$

Նկ. 70

ծայրակետերը՝ բազմանիստի **գագաթներ:** Հատվածը, որ միացնում է մի նիստի չպատկանող գագաթները, կոչվում է բազմանիստի **անկյունագիծ:**

Բազմանիստերը լինում են **ուռուցիկ** և **ոչ ուռուցիկ:** Բազմանիստը կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե այն դասավորված է իր յուրաքանչյուր նիստի հարթության միայն մի կողմում: Քառանիստը, զուգահեռանիստը, ութանիստը ուռուցիկ բազմանիստեր են: Նկար 69-ում պատկերված է ոչ ուռուցիկ բազմանիստ:

Պարզ է, որ ուռուցիկ բազմանիստի բոլոր նիստերն ուռուցիկ բազմանկյուններ են: Կարելի է ապացուցել, որ **ուռուցիկ բազմանիստում յուրաքանչյուր գագաթին հարակից հարթ անկյունների գումարը փոքր է 360^0-ից:**

Այդ պնդումը պարզաբանված է նկար 70-ում, բազմանիստ մակերևույթը «կտրատված է» բոլոր կողերի երկայնքով, և նրա A ընդհանուր գագաթ ունեցող բոլոր նիստերը փռված են այնպես, որ դրանք վերադասավորված են մի α հարթության մեջ: Ինչպես երևում է՝ A գագաթին հարակից բոլոր հարթ անկյունների գումարը՝ այսինքն՝ $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3$-ը, փոքր է 360^0-ից:

26* Երկրաչափական մարմին

Արդեն ասվել է, որ բազմանիստը սահմանափակում է մի որևէ երկրաչափական մարմին: Հստակեցնենք երկրաչափական մարմին հասկացությունը:

M կետը կոչվում է տրված F պատկերի **սահմանային** կետ, եթե նրան որքան ուզեք մոտիկ կետերի մեջ (ներառյալ նաև իրեն) կան կետեր՝ ինչպես այդ պատկերին պատկանող, այնպես էլ նրան չպատկանող:

Պատկերի բոլոր սահմանային կետերի բազմությունը կոչվում է պատկերի **սահման:** Օրինակ, գնդի սահմանը գնդային մակերևույթն է:

* Այս կետի նյութը չի նախատեսվում պարտադիր ուսուցման համար:

Պատկերի այն կետը, որը սահմանային չէ, կոչվում է պատկերի **ներքին** կետ: Պատկերի ներքին կետերից յուրաքանչյուրը բնութագրվում է նրանով, որ տարածության բոլոր կետերը, որոնք բավականաչափ մոտիկ են այդ կետին, նույնպես պատկանում են պատկերին: Օրինակ, գնդի ցանկացած կետ, որն ընկած չէ գնդային մակերևույթի, այսինքն սահմանի վրա, այդ գնդի ներքին կետ է:

Պատկերը կոչվում է **սահմանափակ**, եթե այն կարելի է առնել որևէ գնդային մակերևույթի մեջ: Ակներև է, որ գունդը, քառանիստը, զուգահեռանիստը սահմանափակ պատկերներ են, իսկ ուղիղը և հարթությունը՝ անսահմանափակ:

Պատկերը կոչվում է **կապակցված**, եթե նրա ցանկացած երկու կետերը կարելի է միացնել այնպիսի անընդհատ գծով, որն ամբողջությամբ ընդգրկված է այդ պատկերի մեջ: Կապակցված պատկերի օրինակներ են քառանիստը (տե՛ս նկ. 67,ա), զուգահեռանիստը (տե՛ս նկ. 67,բ), ուրանիստը (տե՛ս նկ. 68), հարթությունը: Երկու զուգահեռ հարթությունները կազմում են մի պատկեր, որը կապակցված չէ:

Երկրաչափական մարմին (կամ, պարզապես, **մարմին**) կոչվում է սահմանափակ և կապակցված այն պատկերը տարածության մեջ, որն ընդգրկում է իր բոլոր սահմանային կետերը, ընդ որում՝ սահմանային կետերից յուրաքանչյուրին որքան ուզեք մոտիկ կան պատկերի ներքին կետեր:

Մարմնի սահմանը անվանում են նրա **մակերևույթ**, և ասում, որ մակերևույթը **սահմանափակում է** մարմինը:

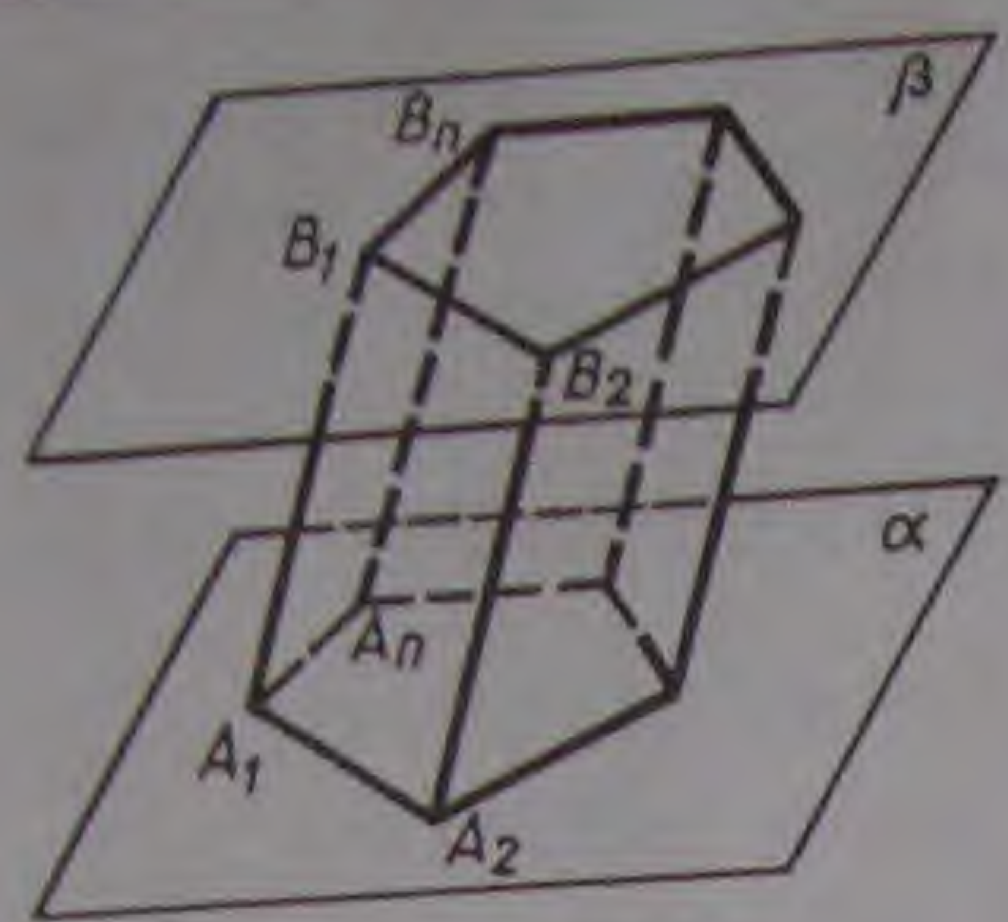
Հարթությունը, որի երկու կողմերում էլ կան տրված մարմնի կետեր, կոչվում է **հատող հարթություն**: Այն պատկերը, որն առաջանում է մարմինը հարթությամբ հատելիս (այսինքն՝ մարմնի և հատող հարթության ընդհանուր մասը) կոչվում է մարմնի **հատույթ**:

27 Պրիզմա

Դիտարկենք երկու հավասար բազմանկյուններ՝ $A_1A_2\ldots A_n$-ը և $B_1B_2\ldots B_n$-ը, որոնք դասավորված են α և β զուգահեռ հարթություններում՝ այնպես, որ այդ բազմանկյունների համապատասխան գագաթները միացնող $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ հատվածները զուգահեռ են (նկ. 71):

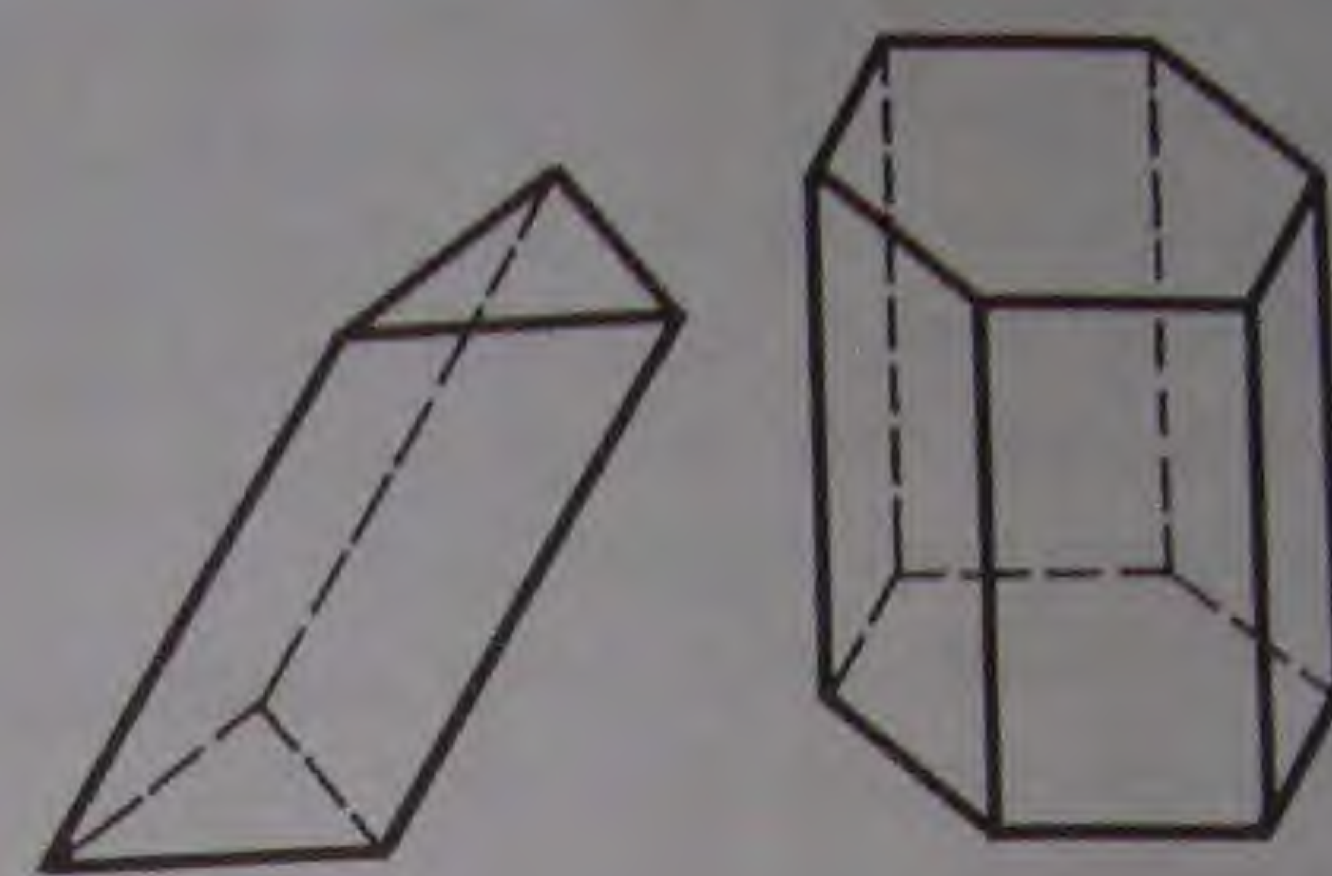
$$A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2,\ \ldots,\ A_nA_1B_1B_n \qquad (1)$$

n թվով քառանկյուններից յուրաքանչյուրը զուգահեռագիծ է, քանի որ նրա հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են: Օրինակ, $A_1A_2B_2B_1$ քառանկյան մեջ A_1B_1 և A_2B_2 կողմերը զուգահեռ են՝ ըստ պայմանի, իսկ A_1A_2 և B_1B_2 կողմերը՝ ըստ երրորդ հարթությամբ հատած զուգահեռ հարթությունների հատկության (կետ 11):



Պրիզմա $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ և $B_1B_2 \ldots B_n$ բազմանկյունները պրիզմայի հիմքերն են, $A_1A_2B_2B_1$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ զուգահեռագծերը՝ կողմնային նիստերը

Նկ. 71



Նկ. 72

Բազմանիստը, որ կազմված է զուգահեռ հարթություններում դասավորված $A_1A_2 \ldots A_n$ և $B_1B_2 \ldots B_n$ երկու հավասար բազմանկյուններից և (1) n զուգահեռագծերից, կոչվում է **պրիզմա*** (նկ. 71):

$A_1A_2 \ldots A_n$ և $B_1B_2 \ldots B_n$ բազմանկյունները կոչվում են պրիզմայի **հիմքեր**, իսկ (1) զուգահեռագծերը՝ **կողմնային նիստեր:** A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n հատվածները կոչվում են պրիզմայի **կողմնային կողեր:** Այդ կողերը՝ որպես հաջորդաբար միմյանց հարակցված (1) զուգահեռագծերի հանդիպակաց կողմեր, հավասար են և զուգահեռ: $A_1A_2 \ldots A_n$ և $B_1B_2 \ldots B_n$ հիմքերով պրիզման նշանակում են $A_1A_2 \ldots A_nB_1B_2 \ldots B_n$ և անվանում **n-անկյուն պրիզմա:** Նկար 72-ում պատկերված են եռանկյուն և վեցանկյուն պրիզմաներ, իսկ 67,բ նկարում քառանկյուն պրիզմա, որը զուգահեռանիստ է:

Հիմքերից մեկի որևէ կետից մյուս հիմքի հարթությանը տարած ուղղահայացը կոչվում է պրիզմայի **բարձրություն:**

Եթե պրիզմայի կողմնային կողերն ուղղահայաց են հիմքերին, ապա պրիզման կոչվում է **ուղիղ պրիզմա**, հակառակ դեպքում՝ **թեք պրիզմա:** Ուղիղ պրիզմայի բարձրությունը հավասար է նրա կողմնային կողին:

Ուղիղ պրիզման կոչվում է **կանոնավոր**, եթե նրա հիմքերը կանոնավոր բազմանկյուններ են: Այդպիսի պրիզմայի բոլոր կողմնային նիստերը հավասար ուղղանկյուններ են (պարզաբանեք, թե ինչու): Նկար 72-ում պատկերված է կանոնավոր վեցանկյուն պրիզմա:

---

* Նկատի ունենալով տվյալ մարմնի բոլոր կողմերից հատած լինելը, երբեմն այն անվանում են նաև *հատվածակողմ:*

Պրիզմայի լրիվ մակերևույթի մակերես կոչվում է նրա բոլոր նիստերի մակերեսների գումարը, իսկ պրիզմայի **կողմնային մակերևույթի մակերես**՝ նրա բոլոր կողմնային նիստերի մակերեսների գումարը: Լրիվ մակերևույթի $S_{լրիվ}$ մակերեսն արտահայտվում է կողմնային մակերևույթի $S_{կողմ}$ մակերեսի և հիմքի $S_{հիմք}$ մակերեսի միջոցով՝ ըստ $S_{լրիվ}=S_{կողմ}+2S_{հիմք}$ բանաձևի:

Ապացուցենք թեորեմ ուղիղ պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսի մասին:

Թեորեմ: ***Ուղիղ պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է հիմքի պարագծի և պրիզմայի բարձրության արտադրյալին:***

Ապացուցում: Ուղիղ պրիզմայի կողմնային նիստերը ուղղանկյուններ են, որոնց հիմքերը պրիզմայի հիմքի կողմերն են, իսկ բարձրությունները հավասար են պրիզմայի h բարձրությանը: Պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է նշված ուղղանկյունների մակերեսների գումարին, այսինքն՝ հավասար է հիմքի կողմերի և h բարձրության արտադրյալների գումարին: Փակագծերից հանելով h արտադրիչը՝ փակագծերում ստացվում է պրիզմայի հիմքի կողմերի գումարը, այսինքն՝ նրա հիմքի P պարագիծը: Այսպիսով՝ $S_{կողմ}=Ph$: Թեորեմն ապացուցված է:

Խնդիրներ

218. Ապացուցեք, որ. **ա)** ուղիղ պրիզմայի բոլոր կողմնային նիստերը ուղղանկյուններ են, **բ)** կանոնավոր պրիզմայի բոլոր կողմնային նիստերը հավասար ուղղանկյուններ են:

219. Ուղղանկյունանիստի հիմքի կողմերն են 12սմ և 5սմ: Ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը հիմքի հարթության հետ կազմում է 45^0 անկյուն: Գտեք ուղղանկյունանիստի կողմնային կողը:

220. Ուղիղ զուգահեռանիստի հիմքը շեղանկյուն է, որի անկյունագծերը 10սմ և 24սմ են, իսկ զուգահեռանիստի բարձրությունը 10սմ է: Գտեք զուգահեռանիստի մեծ անկյունագիծը:

221. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմը 8սմ է, կողմնային կողը՝ 6սմ: Գտեք այն հատույթի մակերեսը, որն անցնում է վերին հիմքի կողմով և դրան հանդիպակաց՝ ստորին հիմքի գագաթով:

222. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը հավասարասրուն սեղան է, որի հիմքերը 25սմ և 9սմ են, բարձրությունը՝ 8սմ: Գտեք պրիզմայի կողմնային կողերին առընթեր երկնիստ անկյունները:

223. Խորանարդի երկու հանդիպակաց կողերով տարված է հատույթ, որի մակերեսը $64\sqrt{2}$ սմ^2 է: Գտեք խորանարդի կողը և նրա անկյունագիծը:

224. Կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի անկյունագիծը հիմքի հարթությանը թեքված է 60^0 անկյան տակ: Գտեք այն հատույթի մակերեսը, որն անցնում է ստորին հիմքի կողմով և վերին հիմքի հանդիպակաց կողմով, եթե հիմքի անկյունագիծը $4\sqrt{2}$ սմ է:

225. Կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի անկյունագիծը կողմնային նիստի հարթության հետ կազմում է 30^0 անկյուն: Գտեք պրիզմայի անկյունագծի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը:

226. Կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի հիմքի անկյունագծով տարված է հատույթ, որը զուգահեռ է պրիզմայի անկյունագծին: Գտեք այդ հատույթի մակերեսը, եթե պրիզմայի բարձրությունը 4սմ է, իսկ հիմքի կողմը՝ 2սմ:

227. Պրիզմայի հիմքը ABC կանոնավոր եռանկյունն է: AA_1 կողմնային կողը հավասար անկյուններ է կազմում հիմքի AC և AB կողմերի հետ: Ապացուցեք, որ. **ա)** $BC\perp AA_1$, **բ)** CC_1B_1B-ն ուղղանկյուն է:

228. $ABCA_1B_1C_1$ թեք պրիզմայի հիմքը ABC հավասարասրուն եռանկյունն է, որում $AC=AB=13$սմ, $BC=10$սմ: Պրիզմայի կողմնային կողը և հիմքի հարթությունը կազմում են 45^0 անկյուն: A_1 գագաթի պրոյեկցիան հիմքի հարթության վրա ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է: Գտեք CC_1B_1B նիստի մակերեսը:

229. Կանոնավոր n-անկյուն պրիզմայի բարձրությունը h է, իսկ հիմքի կողմը՝ a: Հաշվեք պրիզմայի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները, եթե **ա)** $n=3$, $a=10$սմ, $h=15$սմ, **բ)** $n=4$, $a=12$դմ, $h=8$դմ, **գ)** $n=6$, $a=23$սմ, $h=5$դմ, **դ)** $n=5$, $a=0,4$մ, $h=10$սմ:

230. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը եռանկյուն է, որի երկու կողմերն են 5սմ և 3սմ, իսկ դրանց կազմած անկյունը՝ 120^0: Կողմնային նիստերի մակերեսներից մեծագույնը 35սմ^2 է: Գտեք պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

231. Ուղիղ զուգահեռանիստի հիմքի կողմերը 8սմ և 15սմ են, իսկ դրանց կազմած անկյունը 60^0 է: Զուգահեռանիստի անկյունագծային հատույթների* մակերեսներից փոքրագույնը 130սմ^2 է: Գտեք զուգահեռանիստի մակերևույթի մակերեսը:

232. Ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը d է և հիմքի հարթության հետ կազմում է φ անկյուն, իսկ կողմնային նիստերից մեկի հետ՝ α անկյուն: Գտեք ուղղանկյունանիստի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

---

* Զուգահեռանիստի հատույթը կոչվում է անկյունագծային, եթե այն ընդգրկում է նրա որևէ անկյունագիծ և կողմնային կող:

233. $ABCA_1B_1C_1$ ուղիղ պրիզմայի հիմքը ABC ուղղանկյուն եռանկյունն է՝ B ուղիղ անկյունով: BB_1 կողով տարված է BB_1D_1D հատույթը, որն ուղղահայաց է AA_1C_1C նիստի հարթությանը: Գտեք այդ հատույթի մակերեսը, եթե AA_1=10սմ, AD=27սմ, DC=12սմ:

234. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է: Ներքնաձիգի միջնակետով տարված է նրան ուղղահայաց հարթություն: Գտեք հատույթի մակերեսը, եթե էջերը 20սմ և 21սմ են, իսկ պրիզմայի կողմնային կողը 42սմ է:

235. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է՝ φ սուր անկյունով: Այդ անկյան դիմացի էջով և տվյալ էջին հանդիպակաց՝ մյուս հիմքի գագաթով տարված է հատույթ, որը հիմքի հարթության հետ կազմում է θ անկյուն: Գտեք պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսի և այդ հատույթի մակերեսի հարաբերությունը:

236. Ապացուցեք, որ թեք պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է նրա ուղղահայաց հատույթի** պարագծի և կողմնային կողի արտադրյալին:

237. Քառանկյուն թեք պրիզմայի կողմնային կողը 12սմ է, իսկ ուղղահայաց հատույթը շեղանկյուն է, որի կողմը 5սմ է: Գտեք պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

238. Եռանկյուն թեք պրիզմայի երկու կողմնային նիստերը փոխուղղահայաց են, իսկ նրանց ընդհանուր կողը, որը 24սմ է, գտնվում է մյուս երկու կողմնային կողերից 12սմ և 35սմ հեռավորության վրա: Գտեք պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

§ 2 Բուրգ

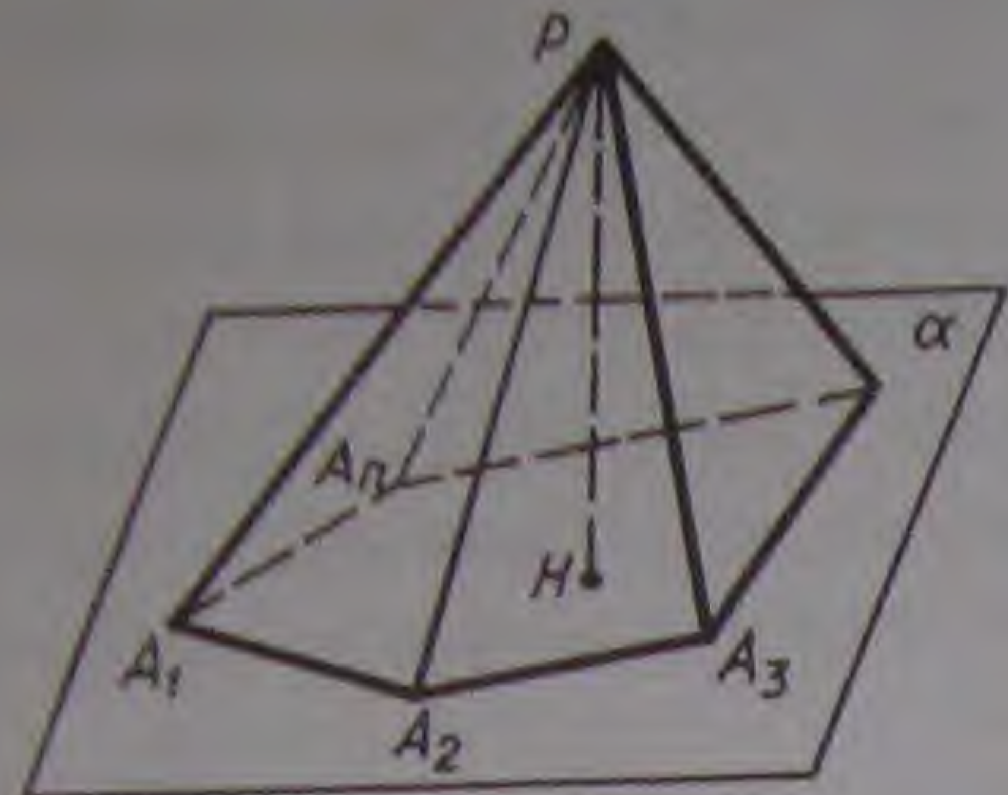
28 Բուրգ

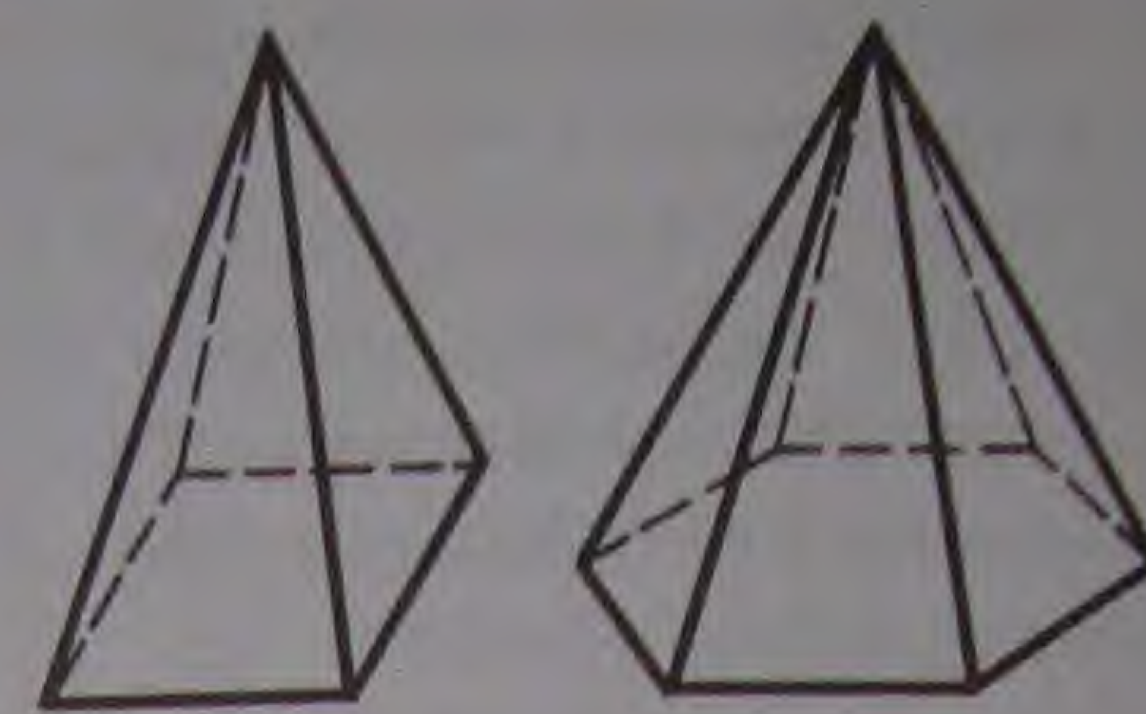
Դիտարկենք $A_1A_2\ldots A_n$ բազմանկյունը և P կետը, որն ընկած չէ այդ բազմանկյան հարթության մեջ: P կետը հատվածներով միացնենք բազմանկյան գագաթներին. ստացվում են n եռանկյուններ (նկ. 73).

$$PA_1A_2,\ PA_2A_3,\ \ldots,\ PA_nA_1: \qquad (1)$$

Բազմանիստը, որ կազմված է $A_1A_2\ldots A_n$ n-անկյուն բազմանկյունից և (1) n եռանկյուններից, կոչվում է **բուրգ**: $A_1A_2\ldots A_n$ բազմանկյունը կոչվում է բուրգի **հիմք**, իսկ (1) եռանկյունները՝ բուրգի **կողմնային նիստեր**: P կետը կոչվում է բուրգի **գագաթ**, իսկ PA_1, PA_2, ..., PA_n հատվածները՝ **կողմնային**

** Թեք պրիզմայի ուղղահայաց հատույթ կոչվում է նրա հատույթն այնպիսի հարթությամբ, որն ուղղահայաց է կողմնային կողերին և հատում է դրանց բոլորին:





Բուրգ: $A_1A_2A_3\ldots A_n$ բազմանկյունը բուրգի հիմքն է: A_1PA_2, A_2PA_3, …, A_nPA_1 եռանկյունները կողմնային նիստերն են, P-ն բուրգի գագաթն է:

Նկ. 73

Նկ. 74

կողեր: $A_1A_2\ldots A_n$ հիմքով և P գագաթով բուրգը նշանակում են այսպես՝ $PA_1A_2\ldots A_n$ և անվանում **n-անկյուն բուրգ:**

Նկար 74-ում պատկերված են քառանկյուն և վեցանկյուն բուրգեր: Պարզ է, որ եռանկյուն բուրգը քառանիստն է:

Բուրգի գագաթից նրա հիմքի հարթությանը տարված ուղղահայացը կոչվում է բուրգի **բարձրություն:** Նկար 73-ում պատկերված բուրգի բարձրությունը PH հատվածն է:

Բուրգի լրիվ մակերևույթի մակերես կոչվում է նրա բոլոր նիստերի (այսինքն հիմքի և կողմնային նիստերի) մակերեսների գումարը, իսկ նրա կողմնային նիստերի մակերեսների գումարը կոչվում է բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերես:

Ակնհայտ է, որ $S_{լրիվ}=S_{կողմ}+S_{հիմք}$:

(29) Կանոնավոր բուրգ

Բուրգը կոչվում է **կանոնավոր**, եթե նրա հիմքը կանոնավոր բազմանկյուն է, իսկ բուրգի գագաթը հիմքի կենտրոնին* միացնող հատվածը նրա բարձրությունն է (նկ. 75):

Նկ. 75

Ապացուցենք, որ **կանոնավոր բուրգի բոլոր կողմնային կողերը հավասար են, իսկ կողմնային նիստերը միմյանց հավասար հավասարասրուն եռանկյուններ են:**

Դիտարկենք $PA_1A_2\ldots A_n$ կանոնավոր բուրգը (նկ. 75): Նախ ապացուցենք, որ այդ բուրգի բոլոր կողմնային կողերը հավասար են:

* Վերհիշենք, որ կանոնավոր բազմանկյան կենտրոն կոչվում է նրան ներգծած (կամ արտագծած) շրջանագծի կենտրոնը:

Յանկացած կողմնային կողը մի ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգ է, որի էջերից մեկը բուրգի PO բարձրությունն է, իսկ մյուսը՝ հիմքին արտագծած շրջանագծի շառավիղը (օրինակ՝ PA_1 կողը OPA_1 եռանկյան ներքնաձիգն է, և այդ եռանկյան մեջ $OP=h$, $OA_1=R$): Հետևաբար, ըստ Պյութագորասի թեորեմի, ցանկացած կողմնային կող հավասար է $\sqrt{h^2+R^2}$ և, ուրեմն, $PA_1=PA_2=\ldots=PA_n$:

Մենք ապացուցեցինք, որ $PA_1A_2\ldots A_n$ կանոնավոր բուրգի բոլոր կողմնային կողերը միմյանց հավասար են, իսկ դրանից հետևում է, որ բոլոր կողմնային նիստերը հավասարասրուն եռանկյուններ են: Այդ եռանկյունների հիմքերը ևս միմյանց հավասար են, որովհետև $A_1A_2\ldots A_n$ բազմանկյունը կանոնավոր է: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշի, բոլոր կողմնային նիստերը միմյանց հավասար եռանկյուններ են: Այսպիսով՝ բուրգի բոլոր կողմնային նիստերը հավասարասրուն եռանկյուններ են, որոնք միմյանց հավասար են, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Կանոնավոր բուրգի կողմնային նիստի բարձրությունը, որ տարված է նրա գագաթից, կոչվում է **հարթագիծ:** Նկար 75-ում հարթագծերից մեկը PE հատվածն է: Պարզ է, որ կանոնավոր բուրգի բոլոր հարթագծերը միմյանց հավասար են:

Ապացուցենք թեորեմ կանոնավոր բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսի մասին:

Թ ե ո ր ե մ : ***Կանոնավոր բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է հարթագծի և հիմքի պարագծի արտադրյալի կեսին:***

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ : Կանոնավոր բուրգի կողմնային նիստերը միմյանց հավասար հավասարասրուն եռանկյուններ են, որոնց հիմքերը բուրգի հիմքի կողմերն են, իսկ բարձրությունները հավասար են հարթագծին: Բուրգի կողմնային մակերևույթի S մակերեսը հավասար է հիմքի կողմերի և d հարթագծի կեսի արտադրյալների գումարին: Փակագծերից հանելով $\frac{1}{2}d$ արտադրիչը՝ փակագծերում ստացվում է բուրգի հիմքի կողմերի գումարը, այսինքն՝ հիմքի պարագիծը:

Թեորեմն ապացուցված է:

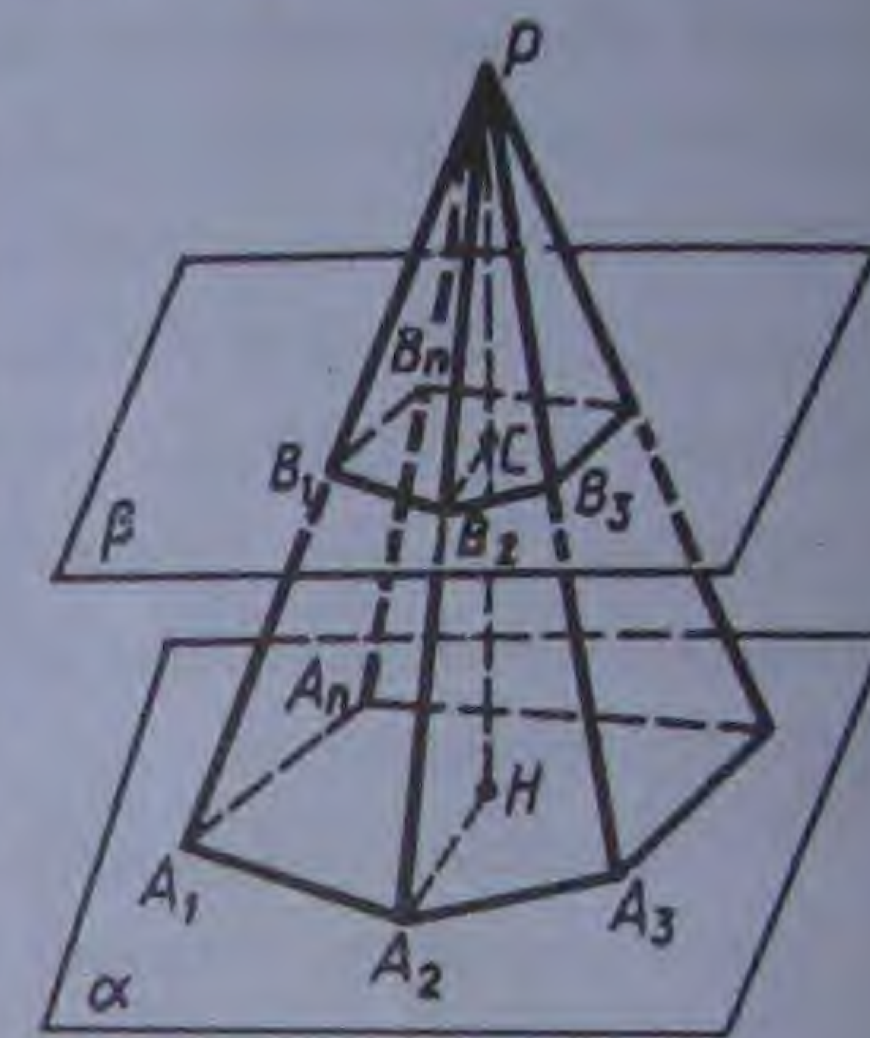
30 Հատած բուրգ

Վերցնենք կամայական բուրգ՝ $PA_1A_2\ldots A_n$-ը և տանենք β հատող հարթություն, որը զուգահեռ է բուրգի հիմքի α հարթությանը և հատում է կողմնային կողերը $B_1, B_2, \ldots, B_n$ կետերում (նկ. 76): β հարթությունը բուրգը տրոհում է երկու բազմանիստերի: Այն բազմանիստը, որի նիստերից

երկուսը զուգահեռ հարթություններում դասավորված $A_1A_2...A_n$ և $B_1B_2...B_n$ *n*-անկյունններն են (**ստորին և վերին հիմքեր**), իսկ մյուս նիստերը *n* քառանկյուններ են՝ $A_1A_2B_2B_1$-ը, $A_2A_3B_3B_2$-ը, ..., $A_nA_1B_1B_n$-ը (**կողմնային նիստեր**), կոչվում է **հատած բուրգ**:

A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n հատվածները կոչվում են հատած բուրգի **կողմնային կողեր**:

$A_1A_2...A_n$ և $B_1B_2...B_n$ հիմքերով հատած բուրգը նշանակում են այսպես՝ $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$:



Հատած բուրգ
Նկ. 76

Հիմքերից մեկի որևէ կետից մյուս հիմքի հարթությանը տարված ուղղահայացը կոչվում է հատած բուրգի **բարձրություն**: Նկար 76-ում պատկերված հատած բուրգի բարձրությունը CH հատվածն է:

Ապացուցենք, որ **հատած բուրգի կողմնային նիստերը սեղաններ են**: Դիտարկենք, օրինակ, $A_1A_2B_2B_1$ կողմնային նիստը (տե՛ս նկ. 76): A_1A_2 և B_1B_2 կողմերը զուգահեռ են, քանի որ պատկանում են այն ուղիղներին, որոնցով PA_1A_2 հարթությունը հատվում է α և β զուգահեռ հարթություններին: Այդ նիստի մյուս երկու կողմերը՝ A_1B_1-ը և A_2B_2-ը, զուգահեռ չեն. նրանց շարունակությունները P կետում հատվում են: Ուրեմն՝ տվյալ նիստը սեղան է: Համանման ձևով կարելի է ապացուցել, որ մյուս բոլոր կողմնային նիստերից յուրաքանչյուրը նույնպես սեղան է:

Հատած բուրգը կոչվում է **կանոնավոր**, եթե այն ստացվել է կանոնավոր բուրգից՝ հիմքին զուգահեռ հարթությամբ հատելիս: Կանոնավոր հատած բուրգի հիմքերը կանոնավոր բազմանկյուններ են, իսկ կողմնային նիստերը՝ հավասարասրուն սեղաններ (դա ապացուցեք): Այդ սեղանների բարձրությունները կոչվում են **հարթագծեր**:

Հատած բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերես կոչվում է նրա կողմնային նիստերի մակերեսների գումարը:

Թ ե ո ր ե մ : ***Կանոնավոր հատած բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է հիմքերի պարագծերի կիսագումարի և հարթագծի արտադրյալին:***

Այս թեորեմն ապացուցեք ինքնուրույն:

Խնդիրներ

239. Բուրգի հիմքը շեղանկյուն է, որի կողմը 5սմ է, իսկ անկյունագծերից մեկը՝ 8սմ: Գտեք բուրգի կողմնային կողերը, եթե նրա բարձրությունը 7սմ է և անցնում է հիմքի անկյունագծերի հատման կետով:

240. Բուրգի հիմքը զուգահեռագիծ է, որի կողմերը 20սմ և 36սմ են, իսկ մակերեսը $360սմ^2$ է: Բուրգի բարձրությունը 12սմ է և անցնում է հիմքի անկյունագծերի հատման կետով: Գտեք բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

241. Բուրգի հիմքը զուգահեռագիծ է, որի կողմերն են 5մ և 4մ, իսկ փոքր անկյունագիծը 3մ է: Բուրգի բարձրությունը 2մ է և անցնում է հիմքի անկյունագծերի հատման կետով: Գտեք բուրգի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

242. Բուրգի հիմքը քառակուսի է, կողմնային կողերից մեկն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը: Կողմնային նիստի հարթությունը, որը չի անցնում բուրգի բարձրությունով, հիմքի հարթությանը թեքված է 45^0 անկյան տակ: Ամենամեծ կողմնային կողը 12սմ է: Գտեք. **ա)** բուրգի բարձրությունը, **բ)** բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

243. *DABC* բուրգի հիմքը *ABC* եռանկյունն է, որում $AB=AC=13$սմ, $BC=10$սմ: *AD* կողն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը և 9սմ է: Գտեք բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

244. *DABC* բուրգի հիմքը *ABC* ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի *AB* ներքնաձիգը 29սմ է, *AC* էջը՝ 21սմ: *DA* կողն ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը և 20սմ է: Գտեք բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

245. Բուրգի հիմքը ուղղանկյուն է, որի անկյունագիծը 8սմ է: Կողմնային նիստերից երկուսի հարթությունները ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը, իսկ մյուս երկու կողմնային նիստերը հիմքի հետ կազմում են 30^0 և 45^0 անկյուններ: Գտեք բուրգի մակերևույթի մակերեսը:

246. Եռանկյուն բուրգի բարձրությունը 40սմ է, իսկ կողմնային նիստերից յուրաքանչյուրի բարձրությունը, որ տարված է բուրգի գագաթից, 41սմ է: **ա)** Ապացուցեք, որ բուրգի բարձրությունն անցնում է նրա հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնով: **բ)** Գտեք բուրգի հիմքի մակերեսը, եթե նրա պարագիծը 42սմ է:

247. Բուրգի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները հավասար են: Ապացուցեք, որ. **ա)** բուրգի բարձրությունն անցնում է նրա հիմքին ներգծած շրջանագծի կենտրոնով, **բ)** բոլոր կողմնային նիստերի բարձրությունները, որ տարված են բուրգի գագաթից, հավասար են, **գ)** բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է հիմքի պարագծի և կողմնային նիստի՝ գագաթից տարված բարձրության արտադրյալի կեսին:

248. Բուրգի հիմքը եռանկյուն է՝ 12սմ, 10սմ և 10սմ կողմերով: Կողմնային նիստերից յուրաքանչյուրը հիմքի նկատմամբ թեքված է 45^0 անկյան տակ: Գտեք բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

249. Բուրգի բոլոր կողմնային կողերը միմյանց հավասար են: Ապացուցեք, որ. **ա)** բուրգի բարձրությունն անցնում է նրա հիմքին արտագծած շրջանագծի կենտրոնով, **բ)** բուրգի բոլոր կողմնային կողերը հիմքի հարթության հետ կազմում են հավասար անկյուններ:

250. Բուրգի հիմքը 120^0 անկյունով հավասարասրուն եռանկյուն է: Բուրգի բարձրությունը 16սմ է, և կողմնային կողերից յուրաքանչյուրը նրա հետ կազմում է 45^0 անկյուն: Գտեք բուրգի հիմքի մակերեսը:

251. $DABC$ բուրգի հիմքը BC ներքնաձիգով ABC ուղղանկյուն եռանկյունն է: Կողմնային կողերը միմյանց հավասար են, իսկ բարձրությունը 12սմ է: Գտեք բուրգի կողմնային կողը, եթե BC=10սմ:

252. $DABC$ բուրգի հիմքը ABC հավասարասրուն եռանկյունն է, որում $AB=AC$, BC=6սմ, AH բարձրությունը 9սմ է: Նաև հայտնի է, որ $DA=DB=DC$=13սմ: Գտեք բուրգի բարձրությունը:

253. Բուրգի հիմքը հավասարասրուն սեղան է, որի բարձրությունը 5սմ է, իսկ հիմքերը 6սմ և $4\sqrt{6}$ սմ են: Բուրգի յուրաքանչյուր կողմնային կողը 13սմ է: Գտեք բուրգի բարձրությունը:

254. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի բարձրությունը H է, հիմքի կողմը՝ a: Գտեք. **ա)** բուրգի կողմնային կողը, **բ)** բուրգի գագաթին հարակից հարթ անկյունը, **գ)** բուրգի կողմնային կողի և հիմքի հարթության կազմած անկյունը, **դ)** բուրգի կողմնային նիստի և հիմքի կազմած անկյունը, **ե)** բուրգի կողմնային կողին առընթեր երկնիստ անկյունը:

255. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 8սմ է, իսկ բուրգի գագաթին հարակից հարթ անկյունը՝ φ: Գտեք այդ բուրգի բարձրությունը:

256. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը m է, իսկ բուրգի գագաթին հարակից հարթ անկյունը՝ α: Գտեք. **ա)** բուրգի բարձրությունը, **բ)** կողմնային կողը, **գ)** կողմնային նիստի և հիմքի կազմած անկյունը, **դ)** բուրգի կողմնային կողին առընթեր երկնիստ անկյունը:

257. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի բարձրությունը h է, իսկ հիմքի կողմին առընթեր երկնիստ անկյունը՝ 45^0: Գտեք բուրգի մակերևույթի մակերեսը:

258. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային կողը հիմքի հարթության հետ կազմում է 60^0 անկյուն: Գտեք բուրգի մակերևույթի մակերեսը, եթե կողմնային կողը 12սմ է:

259. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 6սմ է, իսկ կողմնային նիստի հիմքի հարթության նկատմամբ թեքման անկյունը 60^0 է: Գտեք բուրգի կողմնային կողը:

260. $DABC$ կանոնավոր եռանկյուն բուրգի DO բարձրությունով և DC կողմնային կողով տարված է α հարթությունը: Ապացուցեք, որ. **ա)** AB կողն ուղղահայաց է α հարթությանը, **բ)** C գագաթից ADB նիստի հարթությանը տարված ուղղահայացը նաև ADB հարթությանն է ուղղահայաց:

261. Ապացուցեք, որ կանոնավոր եռանկյուն բուրգում խաչվող կողերը փոխուղղահայաց են:

262. Ապացուցեք, որ կանոնավոր բուրգի բարձրությունով և կողմնային նիստի բարձրությունով անցնող հարթությունն ուղղահայաց է այդ կողմնային նիստի հարթությանը:

263. $MABCD$ կանոնավոր բուրգում K, L և N կետերն ընկած են BC, MC և AD կողերի վրա, $KN \| BA$, $KL \| BM$: **ա)** Կառուցեք բուրգի հատույթը KLN հարթությամբ և որոշեք հատույթի տեսքը: **բ)** Ապացուցեք, որ KLN հարթությունը զուգահեռ է AMB հարթությանը:

264. Գտեք կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա հիմքի կողմը a է, իսկ կողմնային նիստի մակերեսը հավասար է այն հատույթի մակերեսին, որ տարված է բուրգի գագաթով և հիմքի մեծ անկյունագծով:

265. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողմնային կողը հիմքի հարթության նկատմամբ թեքված է 60^0 անկյան տակ: Հիմքի կողմով տարված է հարթություն, որը հիմքի հարթության նկատմամբ թեքված է 30^0 անկյան տակ: Գտեք ստացված հատույթի մակերեսը, եթե հիմքի կողմը 12սմ է:

266. Բուրգի բարձրությունը 2դմ է, հիմքը 6դմ և 8դմ կողմերով ուղղանկյուն է, իսկ կողմնային կողերը միմյանց հավասար են: Գտեք հիմքի անկյունագծով տարված, կողմնային կողին զուգահեռ հատույթի մակերեսը:

267. Բուրգը հատած է հիմքին զուգահեռ հարթությամբ: Ապացուցեք, որ բուրգի կողմնային կողերը և բարձրությունը այդ հարթությամբ տրոհվում են համեմատական մասերի:

268. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքին զուգահեռ հարթությունը տրոհում է բուրգի բարձրությունը 1:2 հարաբերությամբ՝ հաշված բուրգի գագաթից: Ստացված հատած բուրգի հարթագիծը 4դմ է, իսկ նրա լրիվ մակերևույթի մակերեսը՝ 186դմ^2: Գտեք հատած բուրգի բարձրությունը:

269. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի հիմքերի կողմերը 4դմ և 2դմ են, իսկ կողմնային կողը՝ 2դմ: Գտեք հատած բուրգի բարձրությունը և հարթագիծը:

270. Հատած բուրգի հիմքերը կանոնավոր եռանկյուններ են՝ 5սմ և 3սմ կողմերով: Կողմնային կողերից մեկը 1սմ է և ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը: Գտեք հատած բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

§ 3 Կանոնական բազմանիստեր

31 Համաչափությունը փարածության մեջ

Հարթաչափության մեջ մենք դիտարկել ենք պատկերներ, որոնք համաչափ են կետի նկատմամբ և ուղղի նկատմամբ: Տարածաչափության մեջ դիտարկում են համաչափություն` կետի, ուղղի և հարթության նկատմամբ:

A և A_1 կետերը կոչվում են **համաչափ O կետի (համաչափության կենտրոնի) նկատմամբ**, եթե O կետը AA_1 հատվածի միջնակետն է (նկ. 77,ա): O կետը համարվում է համաչափ ինքը իրեն:

A և A_1 կետերը կոչվում են **համաչափ a ուղղի (համաչափության առանցքի) նկատմամբ**, եթե a ուղղին անցնում է AA_1 հատվածի միջնակետով և այդ հատվածին ուղղահայաց է (նկ. 77,բ): a ուղղի ամեն մի կետ համարվում է համաչափ ինքը իրեն:

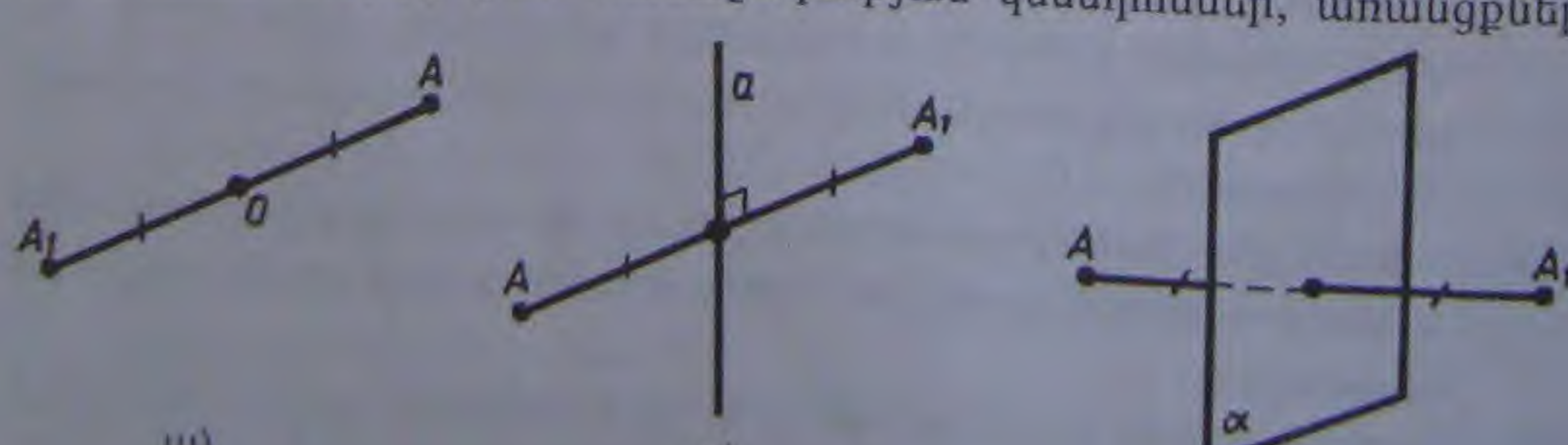
A և A_1 կետերը կոչվում են **համաչափ α հարթության (համաչափության հարթության) նկատմամբ**, եթե α հարթությունն անցնում է AA_1 հատվածի միջնակետով և այդ հատվածին ուղղահայաց է (նկ. 77,գ): α հարթության ամեն մի կետ համարվում է համաչափ ինքը իրեն:

Ներմուծենք պատկերի համաչափության կենտրոնի, առանցքի և հարթության հասկացությունները:

Կետը (ուղիղը, հարթությունը) կոչվում է պատկերի համաչափության կենտրոն (առանցք, հարթություն), եթե պատկերի ամեն մի կետ դրա նկատմամբ համաչափ է այդ նույն պատկերի մի որևէ կետի: Եթե պատկերն ունի համաչափության կենտրոն (առանցք, հարթություն), ապա ասում են, որ այն օժտված է **կենտրոնային (առանցքային, հայելային)** համաչափությամբ:

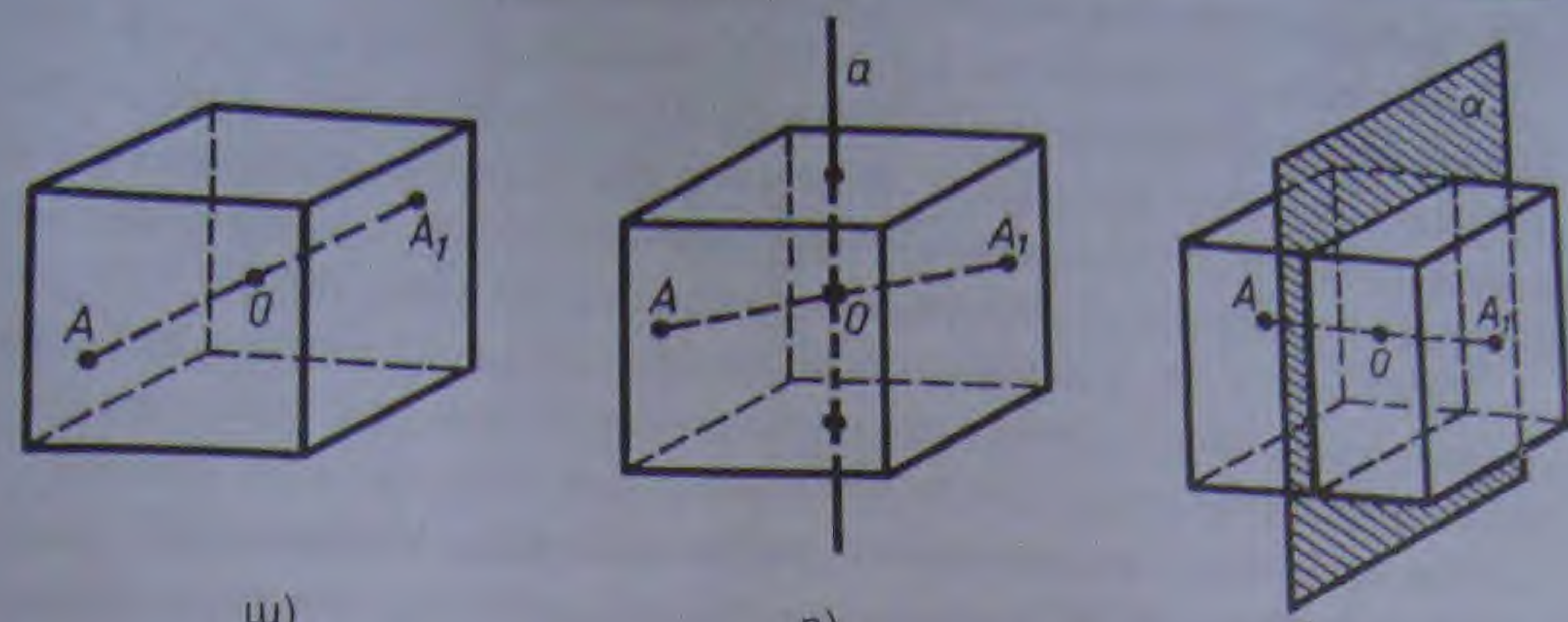
78,ա,բ,գ նկարներում ցույց են տրված ուղղանկյունանիստի համաչափության O կենտրոնը, a առանցքը և α հարթությունը:

Պատկերը կարող է ունենալ մեկ կամ մի քանի համաչափության կենտրոն (համաչափության առանցք, համաչափության հարթություն): Օրինակ, խորանարդն ունի մեկ համաչափության կենտրոն, մի քանի համաչափության առանցք և հարթություն: Գոյություն ունեն պատկերներ, որոնք ունեն անվերջ շատ համաչափության կենտրոններ, առանցքներ,



ա) բ) գ)

Նկ. 77

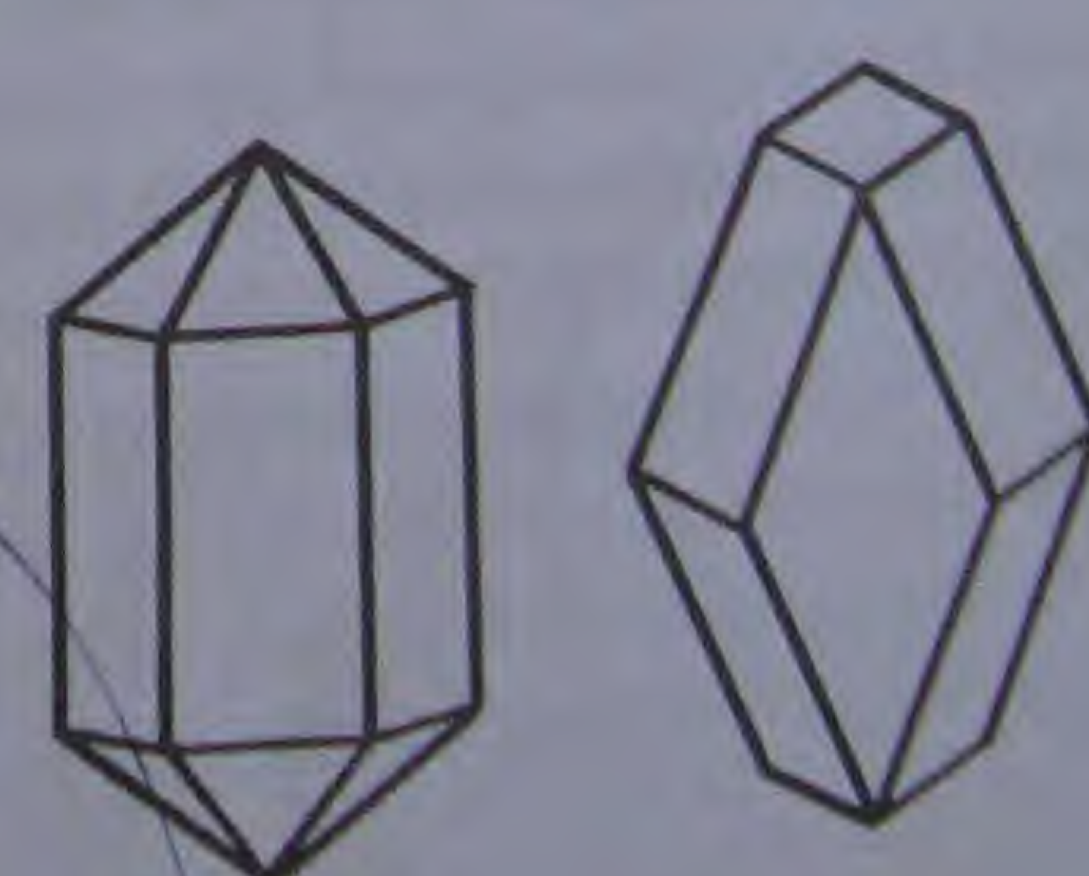


Նկ. 78

հարթություններ: Այդպիսի պատկերների պարզագույն օրինակ են ուղիղը և հարթությունը: Հարթության ցանկացած կետ նրա համաչափության կենտրոն է: Տրված հարթությանն ուղղահայաց ցանկացած ուղիղ (հարթություն) նրա համաչափության առանցք (հարթություն) է: Մյուս կողմից՝ գոյություն ունեն պատկերներ, որոնք չունեն համաչափության կենտրոններ, առանցքներ, հարթություններ: Օրինակ՝ քառանիստը չունի ոչ մի համաչափության կենտրոն:

Համաչափության մենք հաճախ ենք հանդիպում բնության մեջ, ճարտարապետությունում, տեխնիկայում, կենցաղում: Այսպես, շատ շենքեր համաչափ են հարթության նկատմամբ, ինչպես օրինակ Պետական համալսարանի գլխավոր մասնաշենքը (նկ. 79): Բազմաթիվ սարքավորումներ և մանրակներ ունեն համաչափության առանցք: Բնության մեջ հանդիպող գրեթե բոլոր բյուրեղներն ունեն համաչափության կենտրոն, առանցք կամ հարթություն (նկ. 80): Երկրաչափության մեջ բազմանիստերի համաչափության կենտրոնը, առանցքը և հարթությունը կոչվում են այդ բազմանիստի **համաչափության տարրեր**:

Նկ. 79



Նկ. 80

32 Կանոնական բազմանիստի հասկացությունը

Ուռուցիկ բազմանիստը կոչվում է **կանոնական**, եթե նրա բոլոր նիստերը միմյանց հավասար կանոնավոր բազմանկյուններ են, և նրա յուրաքանչյուր գագաթում միանում են միևնույն թվով կողեր: Կանոնական բազմանիստի օրինակ է խորանարդը: Նրա բոլոր նիստերը հավասար քառակուսիներ են, և յուրաքանչյուր գագաթում միանում են երեք կողեր:

Ակնհայտ է, որ կանոնական բազմանիստի բոլոր կողերը միմյանց հավասար են: Կարելի է ապացուցել, որ հավասար են նաև այն բոլոր երկնիստ անկյունները, որոնք ընդգրկում են ընդհանուր կող ունեցող երկու նիստեր:

Ապացուցենք, որ **գոյություն չունի այնպիսի կանոնական բազմանիստ, որի նիստերն են կանոնավոր վեցանկյունները, յոթանկյունները և առհասարակ n-անկյունները՝ $n \geq 6$ դեպքում:** Իսկապես, $n \geq 6$ դեպքում կանոնավոր n-անկյան յուրաքանչյուր անկյունը փոքր չէ 120^0-ից (պարզաբանեք՝ ինչու): Մյուս կողմից՝ բազմանիստի յուրաքանչյուր գագաթին հարակից հարթ անկյունների թիվը պետք է լինի երեքից ոչ պակաս: Ուրեմն՝ եթե գոյություն ունենար այնպիսի կանոնական բազմանիստ, որի նիստերը կանոնավոր n-անկյուններ են, ապա $n \geq 6$ դեպքում կստացվեր, որ բազմանիստի յուրաքանչյուր գագաթին հարակից հարթ անկյունների գումարը փոքր չէ, քան $120^0 \cdot 3 = 360^0$: Սակայն, դա անհնար է, քանի որ ուռուցիկ բազմանիստի յուրաքանչյուր գագաթին հարակից հարթ անկյունների գումարը փոքր է 360^0-ից (կետ 25):

Այս պատճառով՝ կանոնական բազմանիստի յուրաքանչյուր գագաթ կարող է լինել կա՛մ երեք, չորս, հինգ հավասարակողմ եռանկյունների գագաթ, կա՛մ երեք քառակուսիների գագաթ, կա՛մ երեք կանոնավոր հնգանկյունների գագաթ: Այլ հնարավորությունները բացառվում են:

Դրանց համապատասխան ստացվում են հետևյալ կանոնական բազմանիստերը.

Կանոնական քառանիստը* (նկ. 81) կազմված է չորս հավասարակողմ եռանկյուններից: Նրա յուրաքանչյուր գագաթը երեք եռանկյունների գագաթ է: Հետևաբար՝ յուրաքանչյուր գագաթին հարակից հարթ անկյունների գումարը 180^0 է:

Կանոնական ութանիստը (նկ. 82) կազմված է ութ հավասարակողմ եռանկյուններից: Ութանիստի յուրաքանչյուր գագաթը չորս եռանկյունների գագաթ է: Հետևաբար՝ յուրաքանչյուր գագաթին հարակից հարթ անկյունների գումարը 240^0 է:

---

* Չարկավոր է կանոնական քառանիստը չնույնացնել կանոնավոր եռանկյուն բուրգին: Ի տարբերություն կանոնական քառանիստի, որի բոլոր կողերը հավասար են, կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողմնային կողերը թեև միմյանց հավասար են, սակայն դրանք կարող են հավասար չլինել հիմքի կողմերին:

Նկ. 81

Նկ. 82

Նկ. 83

Կանոնական քսանանիստը (նկ. 83) կազմված է քսան հավասարակողմ եռանկյուններից: Քսանանիստի յուրաքանչյուր գագաթը հինգ եռանկյունների գագաթ է: Հետևաբար՝ յուրաքանչյուր գագաթին հարակից հարթ անկյունների գումարը 300^0 է:

Խորանարդը (նկ. 84) կազմված է վեց քառակուսիներից: Խորանարդի յուրաքանչյուր գագաթը երեք քառակուսիների գագաթ է: Հետևաբար՝ յուրաքանչյուր գագաթին հարակից հարթ անկյունների գումարը 270^0 է:

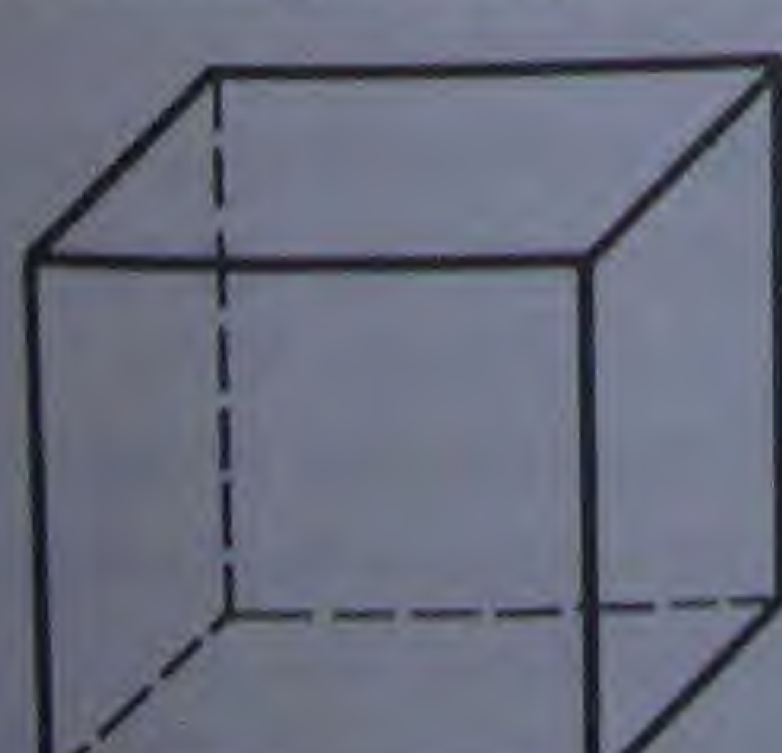
Կանոնական տասներկանիստը (նկ. 85) կազմված է տասներկու կանոնավոր հնգանկյուններից: Տասներկանիստի յուրաքանչյուր գագաթը երեք կանոնավոր հնգանկյունների գագաթ է: Հետևաբար՝ յուրաքանչյուր գագաթին հարակից հարթ անկյունների գումարը 324^0 է:

Այլ տեսակ կանոնական բազմանիստ, բացի թվարկված հինգից, գոյություն չունի:

33 Կանոնական բազմանիստերի համաչափության տարրերը

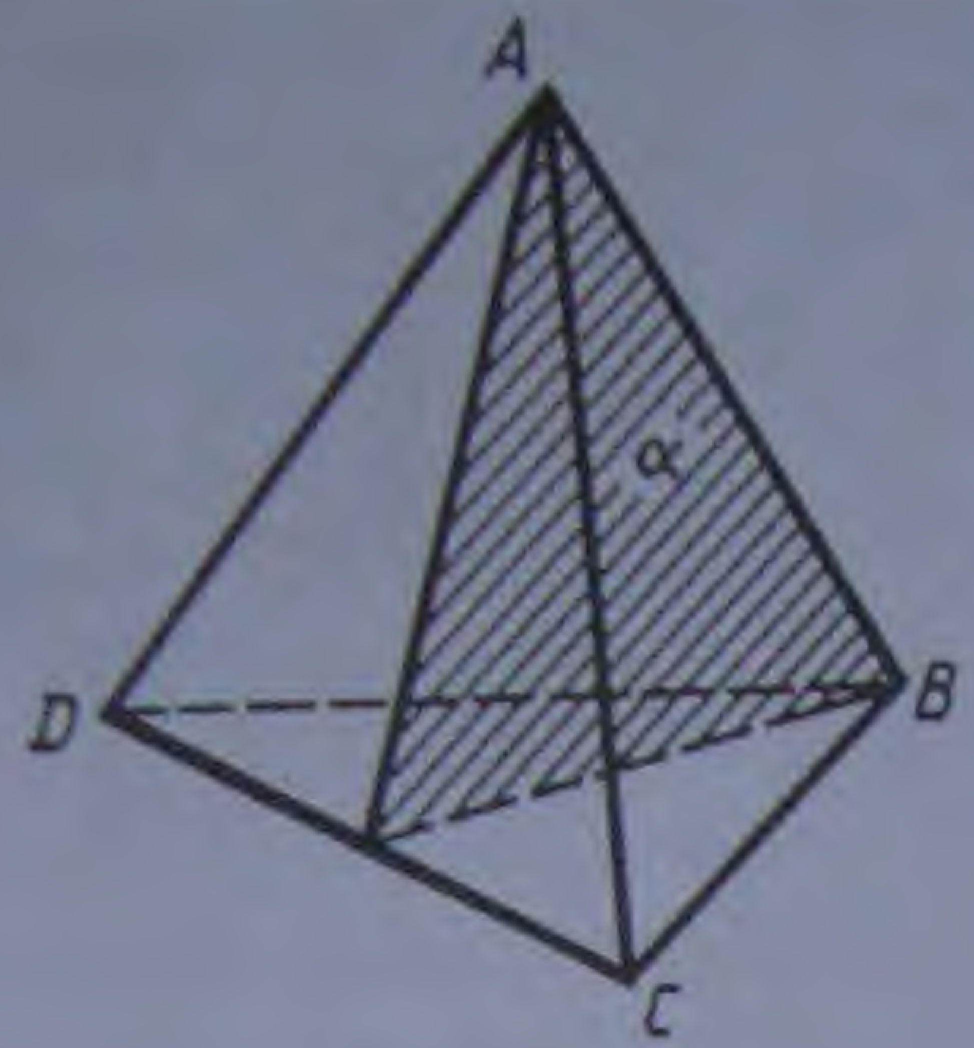
Դիտարկենք կանոնական բազմանիստերի համաչափության տարրերը:

Կանոնական քառանիստը չունի համաչափության կենտրոն: Ուղիղը, որն անցնում է երկու հանդիպակաց կողերի միջնակետերով, նրա համաչափության առանցք է: $ABCD$ կանոնական քառանիստի AB կողով անցնող α հարթությունը, որն ուղղահայաց է դրան հանդիպակաց CD կողին, նրա համաչափության հարթություն է (նկ. 86): **Կանոնական քառանիստն ունի երեք համաչափության առանցք և վեց համաչափության հարթություն:**

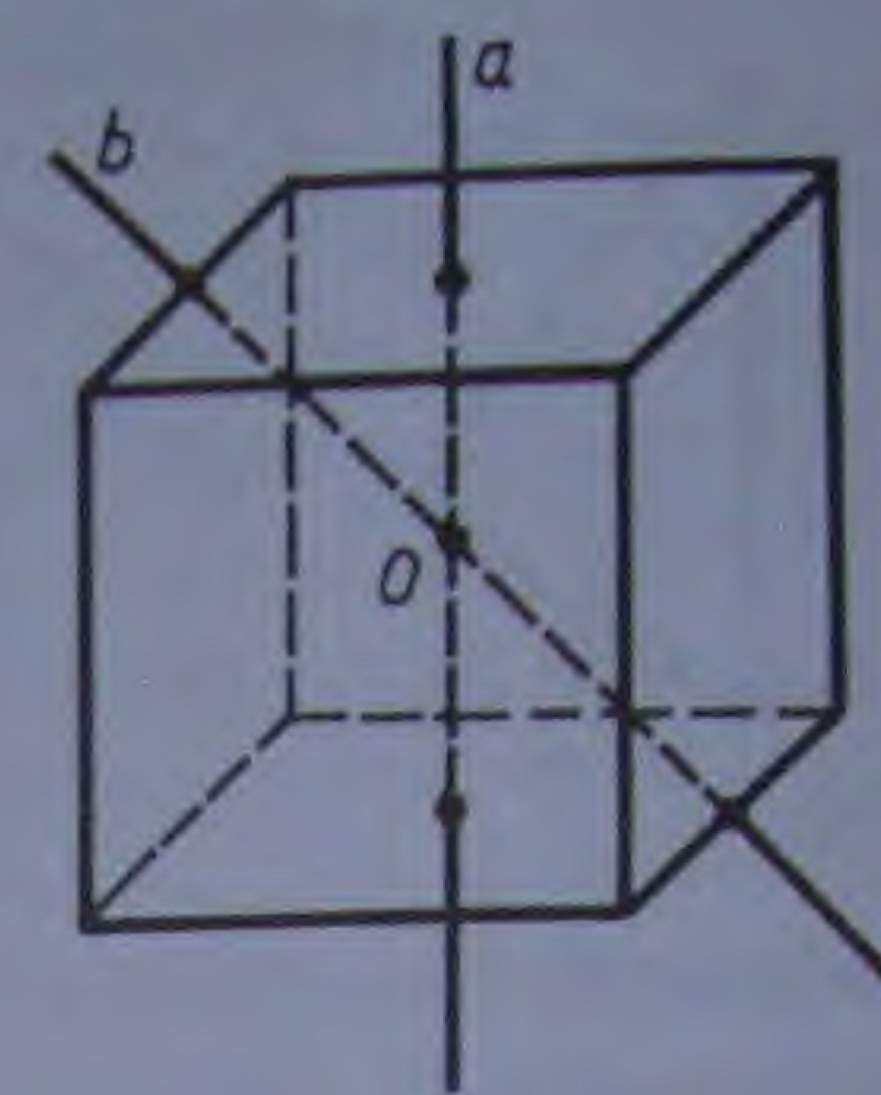


Նկ. 84

Նկ. 85



Նկ. 86



Նկ. 87

Խորանարդն ունի մեկ համաչափության կենտրոն՝ նրա անկյունագծերի հատման կետը: a և b ուղիղները, որոնք անցնում են, համապատասխանաբար, երկու հանդիպակաց նիստերի կենտրոններով և մի նիստի չպատկանող երկու հանդիպակաց կողերի միջնակետերով, խորանարդի համաչափության առանցքներն են (նկ. 87): **Խորանարդն ունի ինը համաչափության առանցք:** Բոլոր համաչափության առանցքներն անցնում են համաչափության կենտրոնով: Խորանարդի համաչափության հարթությունը նրա համաչափության առանցքներից ցանկացած երկուսով անցնող հարթություն է: **Խորանարդն ունի ինը համաչափության հարթություն:**

Կանոնական ութանիստը (տե՛ս նկ. 82), **կանոնական քսանանիստը** (տե՛ս նկ. 83) և **կանոնական տասներկանիստը** (տե՛ս նկ. 85) **ունեն համաչափության կենտրոն և մի քանի համաչափության առանցք ու հարթություն:** Փորձեք հաշվել դրանց թիվը:

Գործնական առաջադրանքներ

271. Նկար 88-ում պատկերված է կանոնական քառանիստի փռվածքը: Խոշորացված մասշտաբով այն արտանկարեք ստվարաթղթի վրա, կտրեք այդ փռվածքը և դրանից կազմեցեք քառանիստ*:

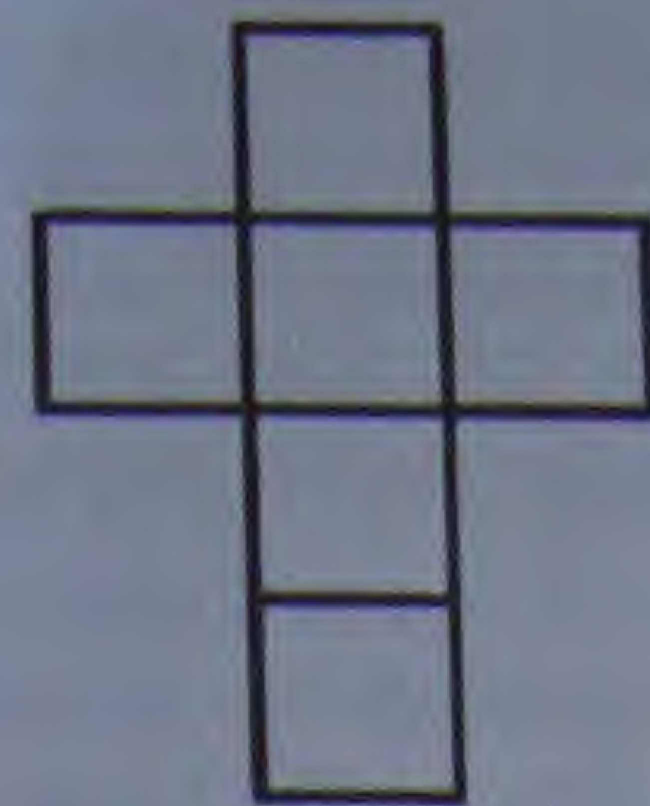
272. Նկար 89-ում պատկերված է խորանարդի փռվածքը: Խոշորացված մասշտաբով այն արտանկարեք ստվարաթղթի վրա, կտրեք փռվածքը և դրանից կազմեցեք խորանարդ:

273. Նկար 90-ում պատկերված է կանոնական ութանիստի փռվածքը: Ստվարաթղթի վրա այն արտանկարեք խոշորացված մասշտաբով, կտրեք այդ փռվածքը և դրանից կազմեցեք ութանիստ:

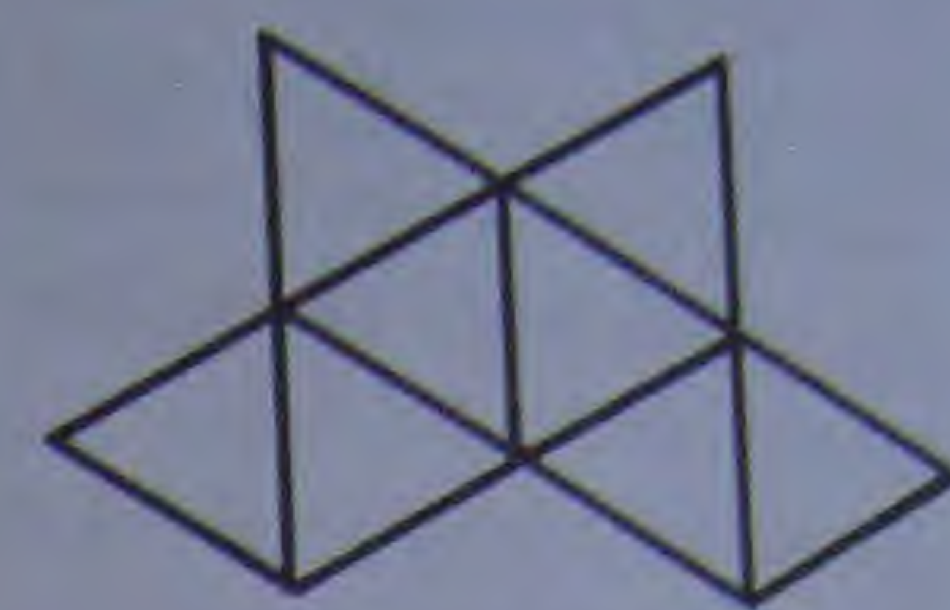
---

* Փռվածքը կտրելիս թողեք անհրաժեշտ սոսնձատեղ:

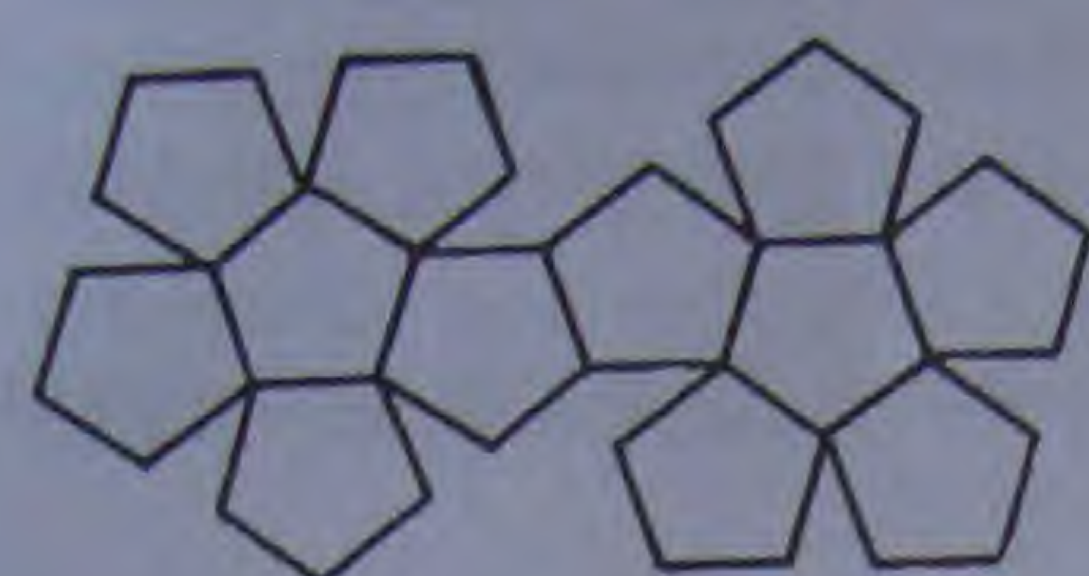
Նկ. 88



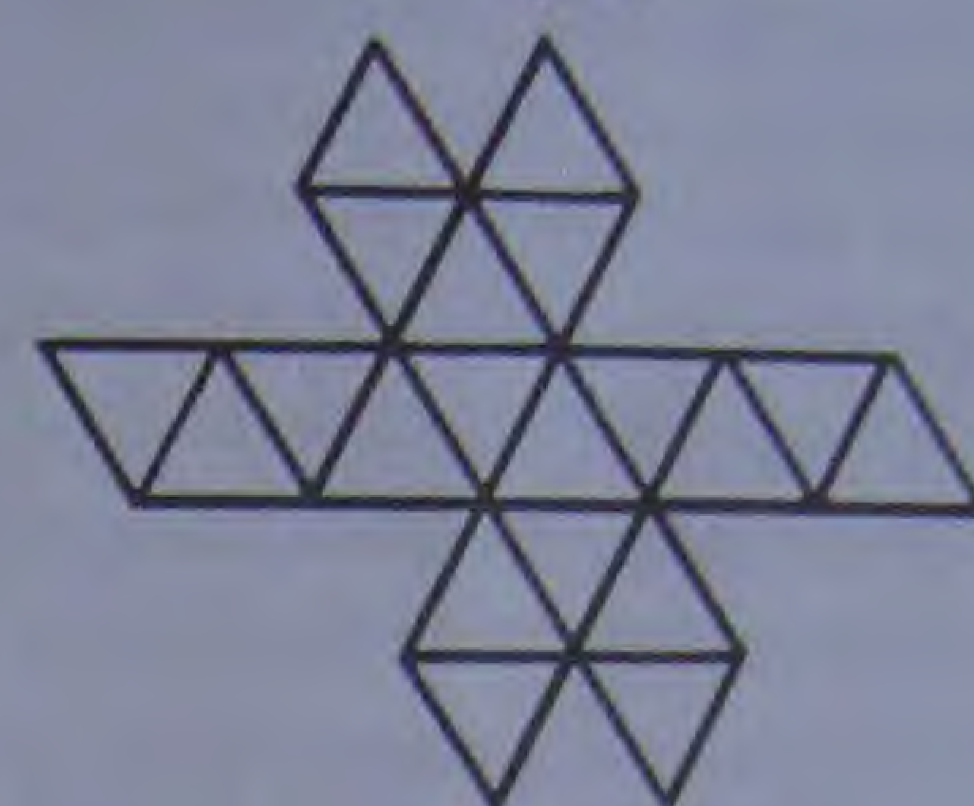
Նկ. 89



Նկ. 90



Նկ. 91



Նկ. 92

274. Նկար 91-ում պատկերված է կանոնական տասներկանիստի փռվածքը: Ստվարաթղթի վրա խոշորացված մասշտաբով արտանկարեք այն, կտրեք այդ փռվածքը և նրանից կազմեցեք տասներկանիստ:

275. Նկար 92-ում պատկերված է կանոնական քսանանիստի փռվածքը: Այն արտանկարեք ստվարաթղթի վրա խոշորացված մասշտաբով, կտրեք փռվածքը և նրանից կազմեցեք քսանանիստ:

Հարցեր և խնդիրներ

276. Քանի՞ համաչափության կենտրոն ունի. **ա)** զուգահեռանիստը, **բ)** կանոնավոր եռանկյուն պրիզման, **գ)** երկնիստ անկյունը, **դ)** հատվածը:

277. Քանի՞ համաչափության առանցք ունի. **ա)** հատվածը, **բ)** կանոնավոր եռանկյունը, **գ)** խորանարդը:

278. Քանի՞ համաչափության հարթություն ունի. **ա)** խորանարդից տարբեր կանոնավոր քառանկյուն պրիզման, **բ)** կանոնավոր քառանկյուն բուրգը, **գ)** կանոնավոր եռանկյուն բուրգը:

279. Գտեք խորանարդի նիստերի՝ ընդհանուր ծայրակետեր ունեցող երկու անկյունագծերի կազմած անկյունը:

280. Խորանարդի կողը a է: Գտեք այն հատույթի մակերեսը, որն անցնում է խորանարդի երկու նիստերի անկյունագծերով:

281. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի D_1 գագաթով տարված են նիստերի անկյունագծերը՝ D_1A-ն, D_1C-ն և D_1B_1-ը, և դրանց ծայրակետերը միաց-

ված են հատվածներով: Ապացուցեք, որ D_1AB_1C բազմանիստը կանոնական քառանիստ է: Գտեք խորանարդի և այդ քառանիստի մակերևույթների մակերեսների հարաբերությունը:

282. Գտեք կանոնական ութանիստի այն երկու կողերի կազմած անկյունը, որոնք ունեն ընդհանուր ծայրակետեր, բայց մի նիստի չեն պատկանում (տե՛ս նկ. 82):

283. $DABC$ կանոնական քառանիստի կողը a է: Գտեք քառանիստի ABC նիստի կենտրոնով անցնող հարթությամբ հատույթի մակերեսը, եթե հարթությունը՝ **ա)** զուգահեռ է BDC նիստին, **բ)** ուղղահայաց է AD կողին:

284. 2սմ կող ունեցող կանոնական քառանիստի յուրաքանչյուր գագաթից զատում են 1սմ կող ունեցող կանոնական քառանիստ: Արդյունքում ի՞նչ պատկեր է ստացվում:

285. Ապացուցեք, որ կանոնական քառանիստում նիստերի կենտրոնները միացնող հատվածներն իրար հավասար են:

286. Կանոնական քառանիստի բարձրությունը h է, կողը՝ m, իսկ նրա նիստերի կենտրոնների հեռավորությունը՝ n: Արտահայտեք. **ա)** m-ը՝ h-ով, **բ)** n-ը՝ m-ով:

287. Կանոնական ութանիստի կողը a է: Գտեք. **ա)** նրա երկու հանդիպակաց գագաթների հեռավորությունը, **բ)** երկու կից նիստերի կենտրոնների հեռավորությունը, **գ)** հանդիպակաց նիստերի հեռավորությունը:

Հարցեր գլուխ III-ի վերաբերյալ

1. Ի՞նչ նվազագույն թվով կողեր կարող է ունենալ բազմանիստը:
2. Պրիզման ունի n նիստ: Ի՞նչ բազմանկյուն է նրա հիմքը:
3. Արդյոք ուղի՞ղ է պրիզման, եթե նրա երկու կից կողմնային նիստերն ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը:
4. Ո՞ր պրիզմայում են կողմնային կողերը զուգահեռ նրա բարձրությանը:
5. Արդյոք կանոնավո՞ր է պրիզման, եթե նրա բոլոր կողերն իրար հավասար են:
6. Կարո՞ղ է, արդյոք, թեք պրիզմայի կողմնային նիստերից որևէ մեկի բարձրությունը լինել նաև պրիզմայի բարձրություն:
7. Արդյոք գոյություն ունի՞ այնպիսի պրիզմա, որի. **ա)** կողմնային կողն ուղղահայաց է հիմքի միայն մեկ կողին, **բ)** հիմքին ուղղահայաց է կողմնային նիստերից միայն մեկը:
8. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզման հիմքերի միջին գծերով անցնող հարթությամբ տրոհված է երկու պրիզմաների: Ինչպե՞ս են հարաբերում այդ պրիզմաների կողմնային մակերևույթների մակերեսները:

9. Արդյոք կանոնավո՞ր է բուրգը, եթե նրա կողմնային նիստերը կանոնավոր եռանկյուններ են:
10. Հիմքի հարթությանն ուղղահայաց քանի՞ նիստ կարող է ունենալ բուրգը:
11. Արդյոք գոյություն ունի՞ քառանկյուն բուրգ, որի հանդիպակաց կողմնային նիստերն ուղղահայաց են հիմքին:
12. Եռանկյուն բուրգի բոլոր նիստերը կարո՞ղ են, արդյոք, լինել ուղղանկյուն եռանկյուններ:
13. Կարելի՞ է, արդյոք, 66սմ երկարությամբ ուղիղ մետաղաձողից պատրաստել կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հենքային մոդել, որի հիմքի կողմը 10սմ է:
14. Ի՞նչ բազմանիստերի է մասնատվում եռանկյուն պրիզման այն հարթությամբ, որն անցնում է վերին հիմքի գագաթով և ստորին հիմքի դրան հանդիպակաց կողմով:

Լրացուցիչ խնդիրներ

288. Ապացուցեք, որ ցանկացած պրիզմայի գագաթների թիվը զույգ է, իսկ կողերի թիվը բազմապատիկ է 3-ին:

289. Ապացուցեք, որ խորանարդի լրիվ մակերևույթի մակերեսը $2d^2$ է, որտեղ d-ն խորանարդի անկյունագիծն է:

290. Ուղղանկյունանիստի հիմքի անկյունագիծը ℓ է, իսկ դրա և հիմքի կողմերից մեկի կազմած անկյունը՝ φ: Այդ կողմի և ուղղանկյունանիստի անկյունագծի կազմած անկյունը θ է: Գտեք ուղղանկյունանիստի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

291. Ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը d է, և հիմքի հարթության հետ կազմում է φ անկյուն, իսկ հիմքի կողմերից մեկի հետ՝ θ անկյուն: Գտեք ուղղանկյունանիստի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

292. Կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմը 6սմ է, իսկ կողմնային կողը՝ 8սմ: Գտեք հիմքի կողմի հեռավորությունը պրիզմայի այն անկյունագծից, որը չի հատում այդ կողմը:

293. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի D_1B և B_1D անկյունագծերը փոխուղղահայաց են: Ապացուցեք, որ պրիզմայի A_1C և B_1D անկյունագծերի կազմած անկյունը 60^0 է:

294. Կանոնավոր քառանկյուն պրիզման հատած է մի հարթությամբ, որն ընդգրկում է պրիզմայի երկու անկյունագծերը: Ստացված հատույթի

մակերեսը S_0 է, իսկ պրիզմայի հիմքի կողմը՝ a: Հաշվեք պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

295. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ թեք զուգահեռանիստի հիմքը շեղանկյուն է: CC_1 կողմնային կողը հիմքի CD և CB կողմերի հետ կազմում է հավասար անկյուններ: Ապացուցեք, որ. **ա)** $CC_1 \perp BD$, **բ)** BB_1D_1D-ն ուղղանկյուն է, **գ)** BD-ն ուղղահայաց է AA_1C_1 հարթությանը, **դ)** AA_1C_1 և BB_1D_1 հարթությունները փոխուղղահայաց են:

296. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի բարձրությունը h է: Ստորին հիմքի միջին գծով և վերին հիմքի՝ դրան զուգահեռ կողմով տարված է α հարթություն, որը ստորին հիմքի հարթության հետ կազմում է φ սուր անկյուն: Գտեք α հարթությամբ առաջացած հատույթի մակերեսը:

297. $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզմայի հիմքը ABC կանոնավոր եռանկյունն է, BD-ն այդ եռանկյան բարձրությունն է, իսկ A_1 գագաթը պրոյեկտվում է այդ նույն եռանկյան O կենտրոնին: Ապացուցեք, որ. **ա)** $A_1BD \perp AA_1C_1$, **բ)** $AA_1O \perp BB_1C$, **գ)** BB_1C_1C նիստը ուղղանկյուն է:

298. b կողմնային կող ունեցող զուգահեռանիստի հիմքը a կողմով քառակուսի է: Վերին հիմքի գագաթներից մեկը հավասարահեռ է ստորին հիմքի բոլոր գագաթներից: Գտեք զուգահեռանիստի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

բաց չ

299. Գտեք կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի բարձրությունը, եթե հիմքի կողմը m է, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը կրկնակի մեծ է հիմքի մակերեսից:

300. $DABC$ կանոնավոր եռանկյուն բուրգում E, F և P կետերը BC, AB և AD կողմերի միջնակետերն են: Որոշեք այդ կետերով անցնող հատույթի տեսքը և գտեք նրա մակերեսը, եթե բուրգի հիմքի կողմը a է, իսկ կողմնային կողը՝ b:

301. $DABC$ կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողմնային կողին առընթեր երկնիստ անկյունը 120^0 է: B գագաթի հեռավորությունը DA կողմնային կողից 16սմ է: Գտեք բուրգի հարթագիծը:

302. Բուրգի հիմքը զուգահեռագիծ է, որի կողմերը 3սմ և 7սմ են, իսկ անկյունագծերից մեկը 6սմ է: Բուրգի բարձրությունը 4սմ է և անցնում է հիմքի անկյունագծերի հատման կետով: Գտեք բուրգի կողմնային կողերը:

303. Բուրգի հիմքը շեղանկյուն է: Երկու կողմնային նիստերն ուղղահայաց են հիմքի հարթությանը և կազմում են 120^0 երկնիստ անկյուն, իսկ մյուս երկու կողմնային նիստերը հիմքի հարթության նկատմամբ թեքված են 30^0 անկյան տակ: Գտեք բուրգի մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա բարձրությունը 12սմ է:

304. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի գագաթին հարակից հարթ անկյունը 60^0 է: Ապացուցեք, որ բուրգի հիմքի և կողմնային նիստի կազմած երկնիստ անկյունը կրկնակի փոքր է կողմնային կողին առընթեր երկնիստ անկյունից:

305. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի բարձրությունը h է, գագաթին հարակից հարթ անկյունը՝ α: Գտեք բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

306. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի բարձրությունը h է և կողմնային նիստի հարթության հետ կազմում է φ անկյուն: Գտեք բուրգի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

307. $MABCD$ կանոնավոր բուրգում $AM=b$, $AD=a$: **ա)** Կառուցեք բուրգի հատույթն α հարթությամբ, որն անցնում է հիմքի BD անկյունագծով և զուգահեռ է MA կողին: Գտեք այդ հատույթի մակերեսը: **բ)** Ապացուցեք, որ M և C կետերը հավասարահեռ են α հարթությունից:

308. Բուրգի հիմքը 5սմ կողմով և 6սմ փոքր անկյունագծով շեղանկյուն է: Բուրգի բարձրությունը 3,2սմ է և անցնում է շեղանկյան անկյունագծերի հատման կետով: Գտեք բուրգի կողմնային նիստերի այն բարձրությունները, որոնք տարված են բուրգի գագաթից:

309. Հավասար կողմնային կողերով բուրգի հիմքը 6դմ և 8դմ կողմերով ուղղանկյուն է: Բուրգի բարձրությունը 6դմ է: Գտեք այն հատույթի մակերեսը, որ տարված է հիմքի փոքր կողմով և բուրգի բարձրության միջնակետով:

310. $DABC$ բուրգի DA կողը ուղղահայաց է ABC հարթությանը: Գտեք բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե $AB=AC=25$սմ, $BC=40$սմ, $DH=8$սմ, որտեղ DH-ը բուրգի բարձրությունն է:

311. $DABC$ բուրգի հիմքը եռանկյուն է, որի կողմերն են $AC=13$սմ, $AB=15$սմ, $CB=14$սմ: DA կողմնային կողը 9սմ է և ուղղահայաց է հիմքի հարթությանը: **ա)** Գտեք բուրգի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

բ) Ապացուցեք, որ A գագաթից BDC նիստի հարթությանը տարված ուղղահայացի հիմքն ընկած է այդ նիստի բարձրության վրա, և գտեք այդ ուղղահայացի երկարությունը:

312. Կանոնավոր n-անկյուն բուրգի կողմնային նիստերը հիմքի հարթության հետ կազմում են φ անկյուն: Գտեք հիմքի հարթության և կողմնային կողի կազմած անկյան տանգենսը:

313. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի հիմքերի կողմերն են 12դմ և 6դմ, իսկ նրա բարձրությունը 1դմ է: Գտեք այդ բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

314. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի բարձրությունը 63սմ է, հարթագիծը՝ 65սմ, իսկ հիմքերի կողմերը հարաբերում են, ինչպես 7:3: Գտեք այդ բուրգի հիմքերի կողմերը:

315. Ապացուցեք, որ կանոնական ութանիստի նիստերի կենտրոնները խորանարդի գագաթներ են:

316. Ապացուցեք, որ կանոնական քառանիստի նիստերի կենտրոնները մեկ այլ կանոնական քառանիստի գագաթներ են:

317. Ապացուցեք, որ խորանարդի նիստերի կենտրոնները կանոնական ութանիստի գագաթներ են:

318. Ապացուցեք, որ կանոնական քառանիստի երկնիստ անկյան և կանոնական ութանիստի երկնիստ անկյան գումարը 180^0 է:

319. Կանոնական քառանիստը տրված գագաթով անցնող քանի՞ համաչափության հարթություն ունի:

ԳԼՈՒԽ IV

ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

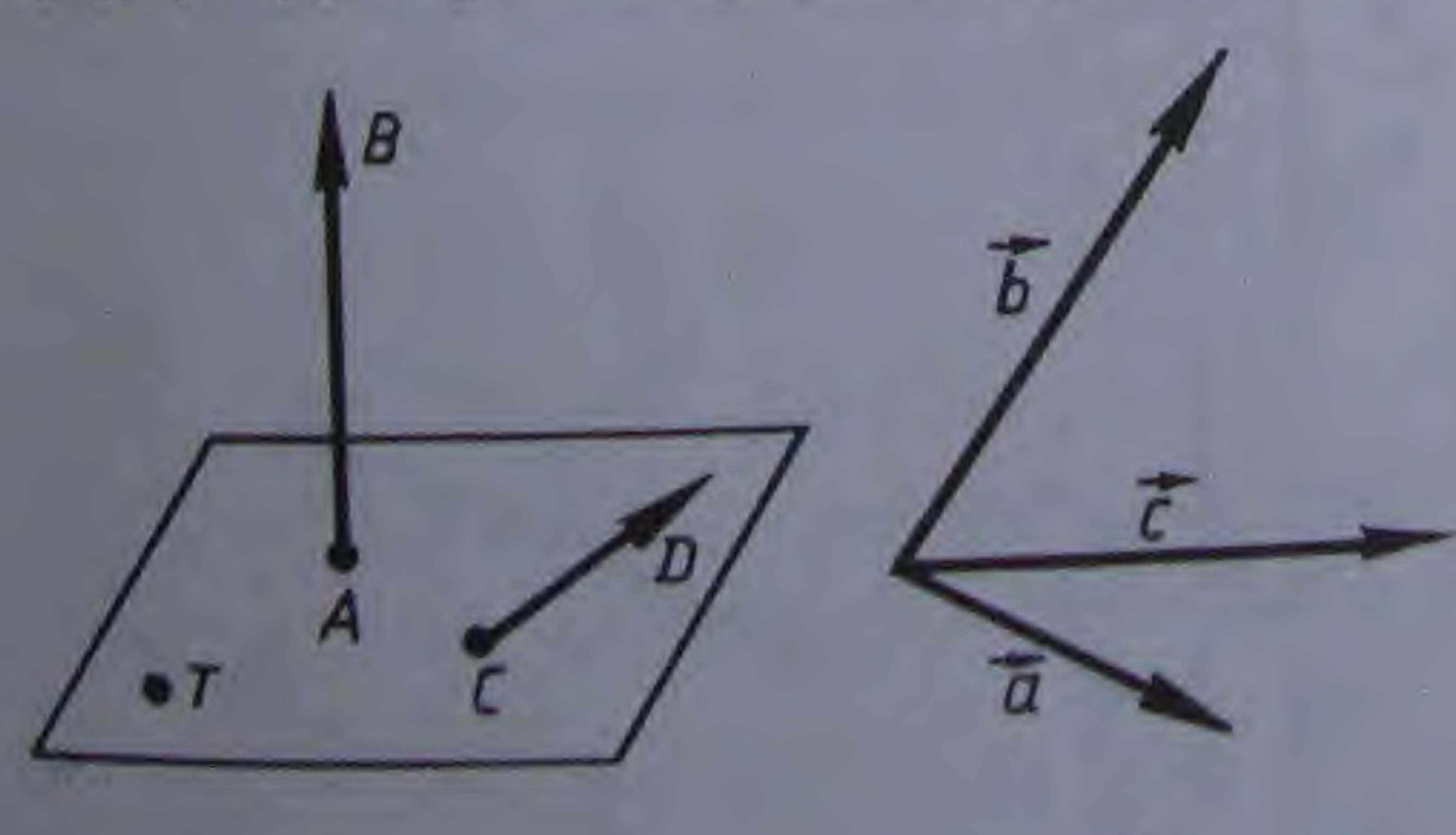
§ 1 Տարածության մեջ վեկտորի հասկացությունը

34 Վեկտորի հասկացությունը

Հարթաչափության դասընթացից մեզ արդեն ծանոթ են հարթության վրա վեկտորի հասկացությունը և վեկտորների հետ կատարվող գործողությունները: Տարածության մեջ վեկտորներին վերաբերող հասկացությունները ներմուծվում են նույն կերպ, ինչպես հարթության վրա դիտարկվող վեկտորների համար:

Հատվածը, որի համար ցուցանշված է, թե նրա ծայրերից որն է համարվում սկիզբ (սկզբնակետ), և որը վերջ (վերջնակետ), կոչվում է **վեկտոր:** Վեկտորի ուղղությունը (սկզբից դեպի վերջը) նկարների վրա ցուցանշվում է սլաքով: Տարածության յուրաքանչյուր կետը նս կարող է դիտվել իբրև վեկտոր: Այդպիսի վեկտորը կոչվում է **զրոյական:** Զրոյական վեկտորի սկիզբն ու վերջը համընկնում են, և այն մի որոշակի ուղղություն չունի: 93,ա նկարում պատկերված են ոչ զրոյական $\vec{AB}$ և $\vec{CD}$ վեկտորները և $\vec{TT}$ զրոյական վեկտորը, իսկ 93,բ նկարում ոչ զրոյական $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները, որոնք ունեն ընդհանուր սկիզբ: Զրոյական վեկտորը նշանակվում է նաև $\vec{0}$ պայմանանշանով:

$\vec{AB}$ **ոչ զրոյական վեկտորի երկարություն** կոչվում է AB հատվածի երկարությունը: $\vec{AB}$ վեկտորի երկարությունը նշանակվում է $|\vec{AB}|$, նմա-



ա) բ)

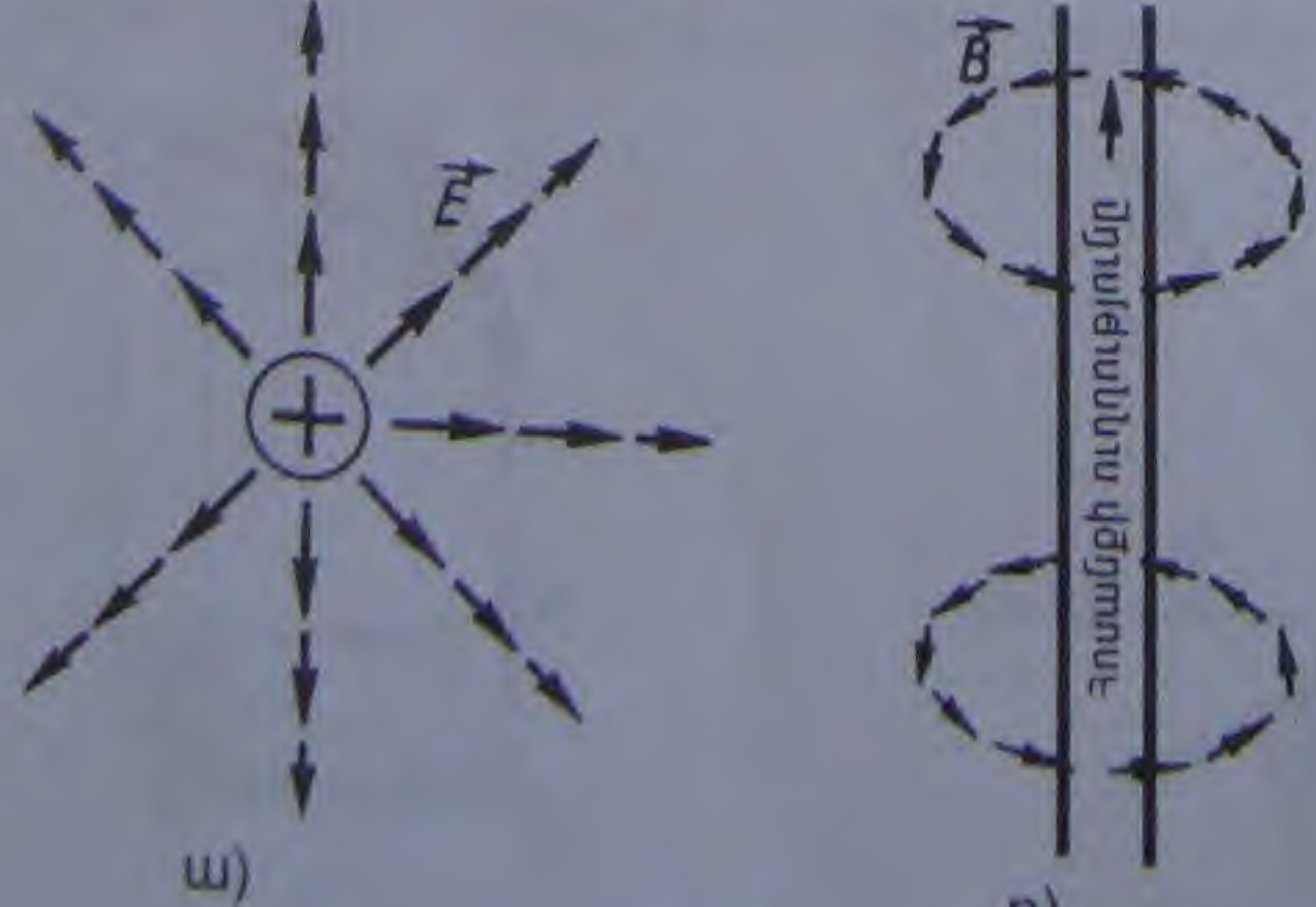
Նկ. 93

Նկ. 94

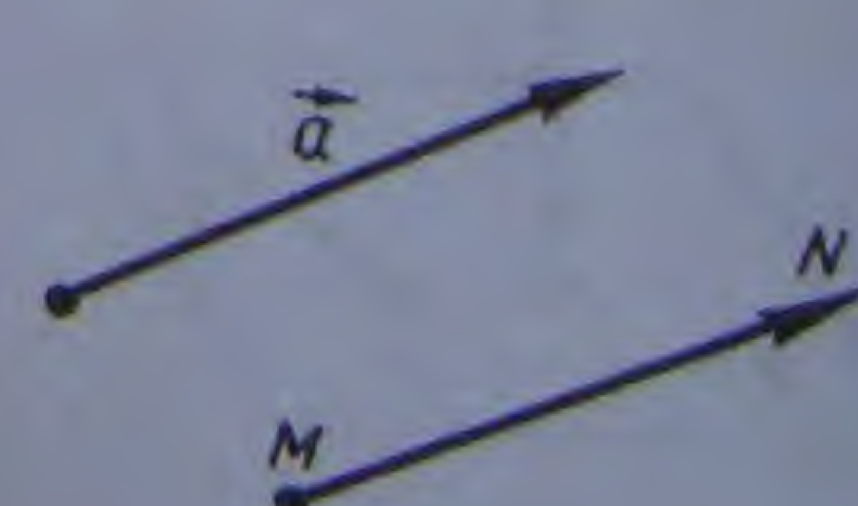
$\vec{a}$ վեկտորի երկարությունը՝ $|\vec{a}|$: Զրոյական վեկտորի երկարու- նապես $\vec{a}$ վեկտորի երկարությունը՝ $|\vec{a}|$: Զրոյական վեկտորի երկարությունը համարվում է զրոյի հավասար՝ $|\vec{0}| = 0$:

Երկու ոչ զրոյական վեկտորներ կոչվում են **համագիծ,** եթե նրանք ընկած են մի ուղղի, կամ զուգահեռ ուղիղների վրա: Եթե երկու ոչ զրոյական $\vec{AB}$ և $\vec{CD}$ վեկտորները համագիծ են, ընդ որում AB և CD ճառագայթները համուղղված են, ապա $\vec{AB}$ և $\vec{CD}$ վեկտորները կոչվում են **համուղղված,** իսկ եթե այդ ճառագայթները համուղղված չեն, ապա $\vec{AB}$ և $\vec{CD}$ վեկտորները կոչվում են **հակուղղված:** Պայմանավորվենք՝ զրոյական վեկտորը համարել ցանկացած վեկտորին համուղղված: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ գրառումը նշանակում է, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են, իսկ $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$ գրառումը՝ որ $\vec{c}$ և $\vec{d}$ վեկտորները հակուղղված են: Նկար 94-ում պատկերված է զուգահեռանիստ: Այդ նկարում $\vec{AM} \uparrow\uparrow \vec{DK}$, $\vec{AD} \uparrow\uparrow \vec{EK}$, $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{DC}$, իսկ $\vec{AD}$ և $\vec{AM}$ վեկտորները ո՛չ համուղղված են, և ոչ էլ հակուղղված, որովհետև համագիծ չեն:

Հարթաչափության մեջ վեկտորներ ուսումնասիրելիս խոսել ենք այն մասին, որ ֆիզիկական մեծություններից շատերը, օրինակ՝ ուժը, տեղափոխությունը, արագությունը, վեկտորական մեծություններ են: Էլեկտրական և մագնիսական երևույթներ ուսումնասիրելիս ի հայտ են գալիս վեկտորական մեծությունների նոր օրինակներ: Լիցքերը տարածության մեջ ստեղծում են էլեկտրական դաշտ, որը տարածության յուրաքանչյուր կետում բնութագրվում է էլեկտրական դաշտի լարվածության վեկտորով: 95,ա նկարում պատկերված են դրական կետային լիցքի էլեկտրական



Նկ. 95



Նկ. 96

դաշտի լարվածության վեկտորները: Էլեկտրական հոսանքը, այսինքն լիցքերի ուղղորդված շարժումը, տարածության մեջ ստեղծում է մագնիսական դաշտ, որը տարածության յուրաքանչյուր կետում բնութագրվում է մագնիսական ինդուկցիայի վեկտորով: 95,բ նկարում պատկերված են հոսանքատար ուղղագիծ հաղորդալարի մագնիսական դաշտի ինդուկցիայի վեկտորները:

(35) Վեկտորների հավասարությունը

Վեկտորները կոչվում են **հավասար,** եթե նրանք համուղղված են, և նրանց երկարությունները հավասար են: Նկար 94-ում $\vec{AE} = \vec{DK}$, քանի որ $\vec{AE} \uparrow\uparrow \vec{DK}$ և $|\vec{AE}| = |\vec{DK}|$, իսկ $\vec{AB} \neq \vec{DC}$, քանի որ $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{DC}$:

Եթե A կետը $\vec{a}$ վեկտորի սկիզբն է, ապա ասում են, որ $\vec{a}$ վեկտորը **տեղադրված է** A կետից: Դժվար չէ ապացուցել, որ **ցանկացած կետից կարելի է տեղադրել տրված վեկտորին հավասար վեկտոր, ընդ որում միայն մեկը:** Իսկապես, դիցուք՝ $\vec{a}$-ն տրված վեկտորն է, իսկ M-ը՝ տրված կետ (նկ.96): $\vec{a}$ վեկտորի ծայրակետերով (սկիզբով ու վերջով) և M կետով տանենք հարթություն և, այնուհետև, այդ հարթության վրա կառուցենք $\vec{MN} = \vec{a}$ վեկտորը: Ակնհայտ է, որ $\vec{MN}$-ը որոնելի վեկտորն է, ընդ որում՝ կառուցումից հետևում է, որ $\vec{MN}$-ը M սկզբնակետով միակ վեկտորն է, որ հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին:

Հարցեր և խնդիրներ

320. $ABCD$ քառանիստում M, N և K կետերը, համապատասխանաբար, AC, BC և CD կողերի միջնակետերն են, AB=3սմ, BC=4սմ, BD=5սմ: Գտեք հետևյալ վեկտորների երկարությունները.

4

ա) $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{BD}$, $\vec{NM}$, $\vec{BN}$, $\vec{NK}$,

բ) $\vec{CB}$, $\vec{BA}$, $\vec{DB}$, $\vec{NC}$, $\vec{KN}$:

4 3 5 3 2,5

321. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստն ունի հետևյալ չափումները՝ AD=8սմ, AB=9սմ, AA_1=12սմ: Գտեք հետևյալ վեկտորների երկարությունները.

13 4 9

ա) $\vec{CC_1}$, $\vec{CB}$, $\vec{CD}$,

բ) $\vec{DC_1}$, $\vec{DB}$, $\vec{DB_1}$:

15սմ. $\sqrt{145}$սմ. 17սմ.

322. Նկար 97-ում պատկերված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: M և K կետերը B_1C_1 և A_1D_1 կողերի միջնակետերն են: Այդ նկարում նշեք բոլոր զույգերը.

ա) համուղղված վեկտորների,

բ) հակուղղված վեկտորների,

գ) հավասար վեկտորների:

323. Նկար 98-ում պատկերված է $ABCD$ քառանիստը, որի կողերը հավասար են: M, N, P և Q կետերը AB, AD, DC, BC կողերի միջնակետերն են: **ա)** Նշեք այդ նկարում պատկերված բոլոր հավասար վեկտորների զույգերը: **բ)** Որոշեք $MNPQ$ քառանկյան տեսքը:

324. Արդյոք ճշմարի՞տ է պնդումը.

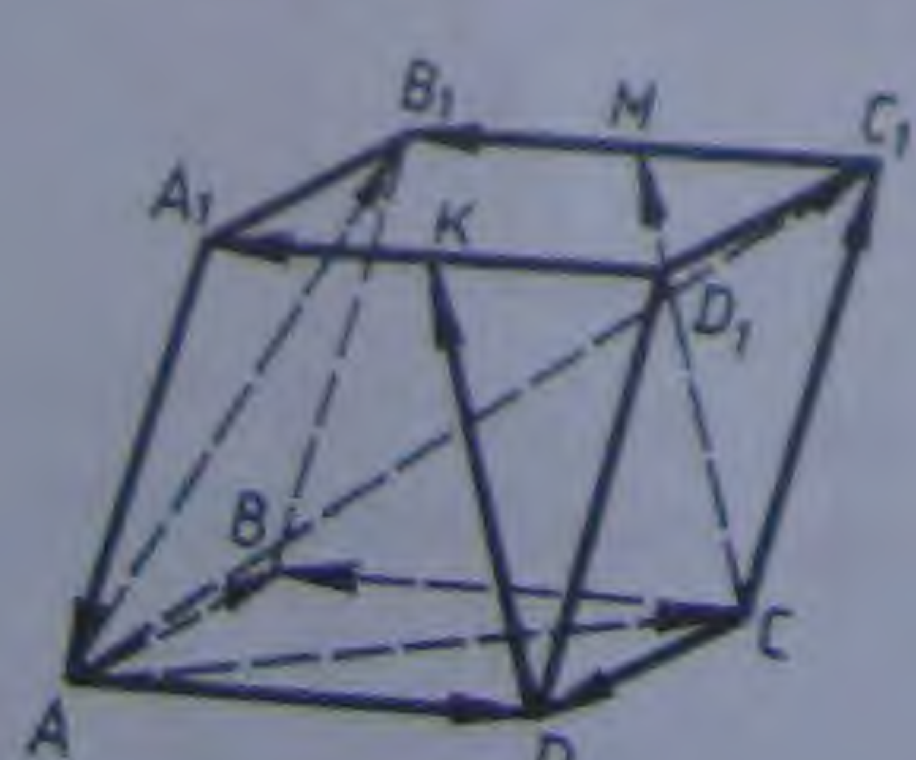
ա) ոչ զրոյական վեկտորին համագիծ երկու վեկտորներն՝ իրենք, համագիծ են, **բ)** ոչ զրոյական վեկտորին համուղղված երկու վեկտորներն՝ իրենք, համուղղված են, **գ)** ոչ զրոյական վեկտորին համագիծ վեկտորները համուղղված են:

325. Հայտնի է, որ $\vec{AA_1} = \vec{BB_1}$: Միմյանց նկատմամբ ինչպե՞ս են դասավորված.

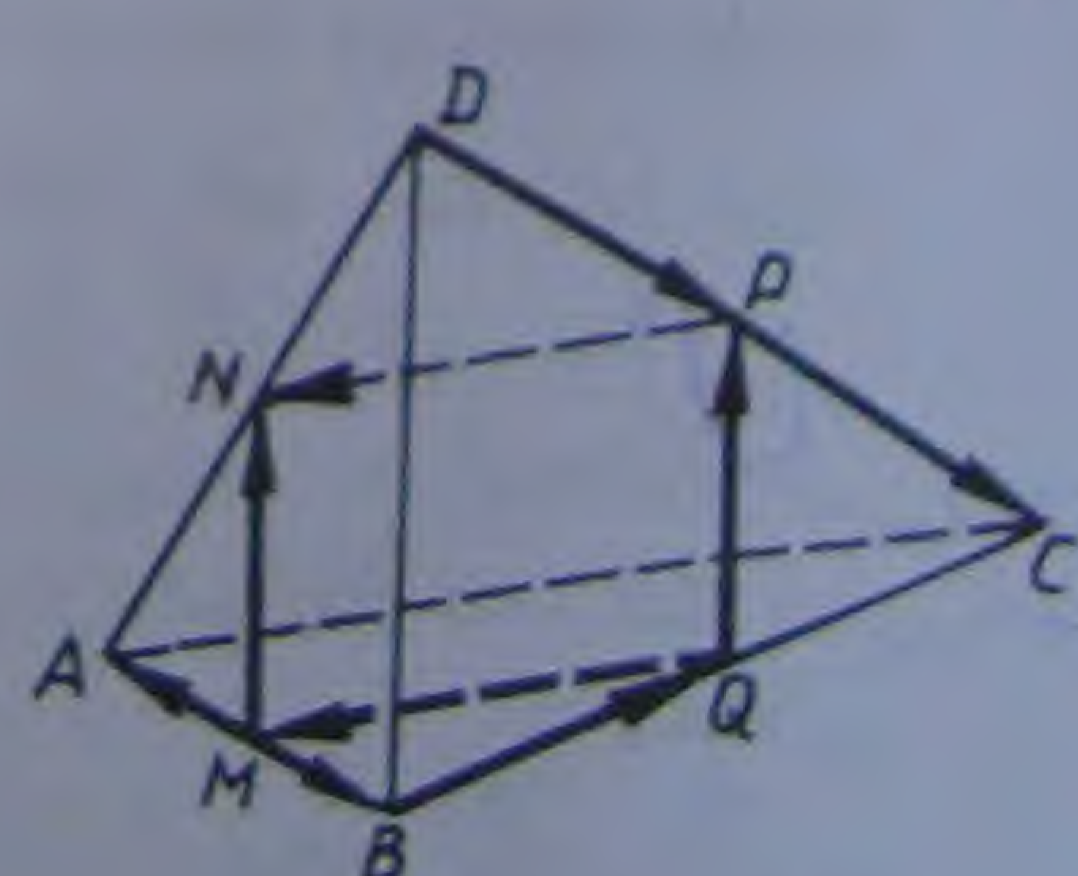
ա) AB և A_1B_1 ուղիղները, **բ)** AB ուղիղը և այն հարթությունը, որն անցնում է A_1 և B_1 կետերով, **գ)** այն հարթությունները, որոնցից մեկն անցնում է A և B, իսկ մյուսը՝ A_1 և B_1 կետերով:

326. Նկար 97-ում պատկերված է զուգահեռանիստ, որում M և K կետերը B_1C_1 և A_1D_1 կողերի միջնակետերն են: Անվանեք այն վեկտորը, որն ստացվում է տեղադրելով՝

ա) C կետից՝ $\vec{DD_1}$-ին հավասար վեկտոր, **բ)** D կետից՝ $\vec{CM}$-ին հավասար վեկտոր, **գ)** A_1 կետից՝ $\vec{AC}$-ին հավասար վեկտոր, **դ)** C_1 կետից՝ $\vec{CB}$-ին հավասար վեկտոր, **ե)** M կետից՝ $\vec{KA_1}$-ին հավասար վեկտոր:



Նկ. 97



Նկ. 98

§ 3 Վեկտորների գումարումը և հանումը: Վեկտորի բազմապատկումը թվով

36 Վեկտորների գումարումը և հանումը

Ներմուծենք կամայական երկու՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումարման կանոնը: Որևէ A կետից տեղադրենք $\overrightarrow{AB}$ վեկտորը՝ հավասար $\vec{a}$-ին (նկ. 99): Այնուհետև B կետից տեղադրենք $\overrightarrow{BC}$ վեկտորը՝ հավասար $\vec{b}$-ին: $\overrightarrow{AC}$ վեկտորը կոչվում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ **վեկտորների գումար.** $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$:

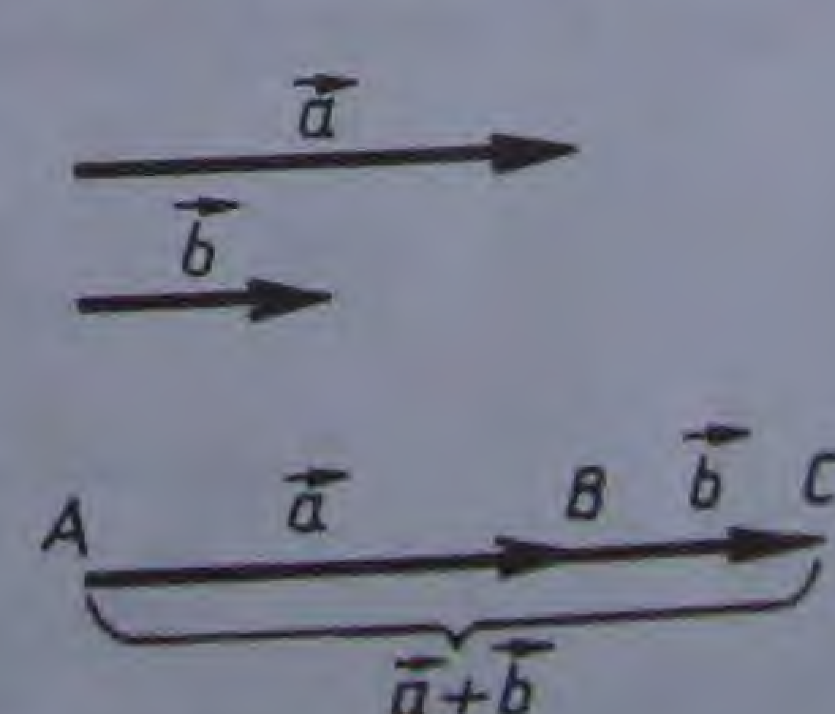
Վեկտորների գումարման այս կանոնը կոչվում է **եռանկյան կանոն:** 99,ա նկարում պարզաբանվում է այդ անվանումը: Նկատենք, որ ըստ այս նույն կանոնի են գումարվում նաև համագիծ վեկտորները, թեև դրանց գումարման դեպքում եռանկյուն չի ստացվում: 99,բ,գ նկարներում լուսաբանվում է համագիծ վեկտորների գումարումը:

Ճիշտ նույն կերպ, ինչպես արվել է հարթաչափության մեջ, ապացուցվում է, որ $\vec{a} + \vec{b}$ **գումարը կախում չունի այն A կետի ընտրությունից, որից գումարման դեպքում տեղադրվում է $\vec{a}$ վեկտորը:** Այլ խոսքով՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներն ըստ եռանկյան կանոնի գումարելիս եթե A կետը փոխարինվի մեկ այլ A_1 կետով, ապա $\overrightarrow{AC}$ վեկտորը կփոխարինվի հավասար $\overrightarrow{A_1C_1}$ վեկտորով (նկ. 100): Այս պնդումն ապացուցեք ինքնուրույն:

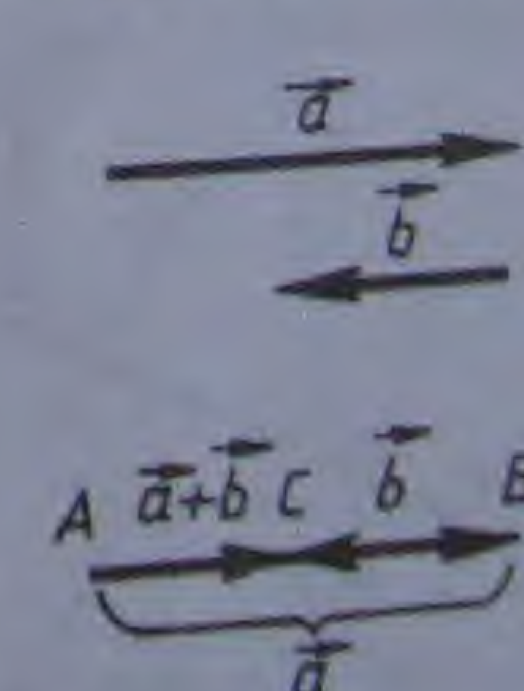
Եռանկյան կանոնը կարելի է ձևակերպել նաև այսպես. **ցանկացած երբ՝ A, B և C կետերի համար տեղի ունի $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ հավասարությունը:**

Երկու տարագիծ վեկտորների գումարման համար կարելի է օգտվել նաև հարթաչափության դասընթացից հայտնի **զուգահեռագծի կանոնից:**

ա)

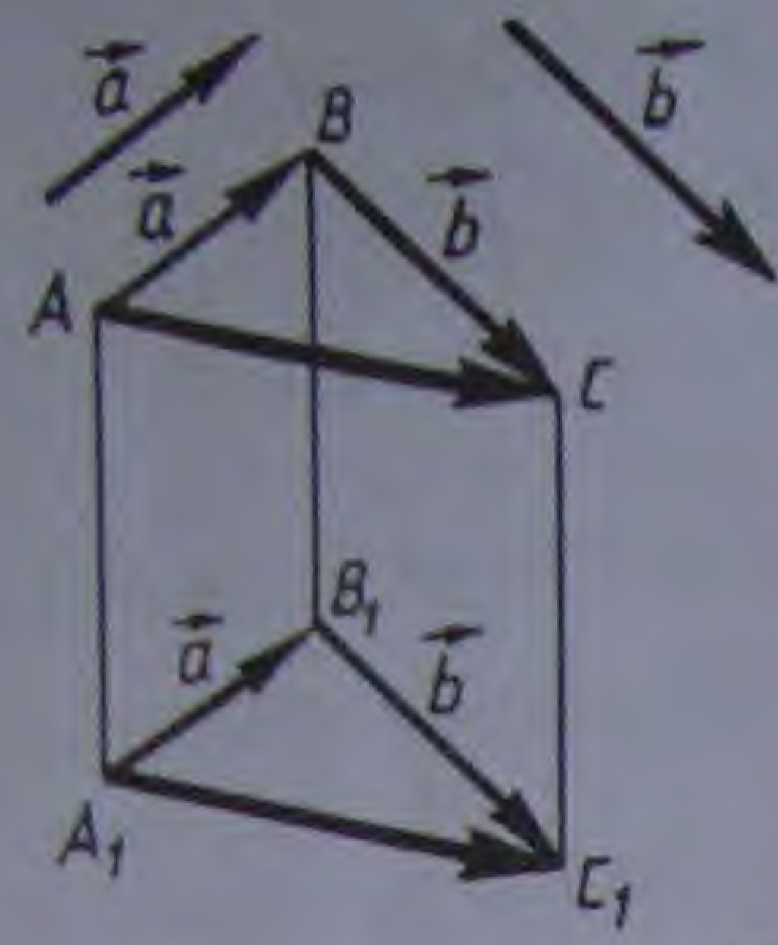


բ)

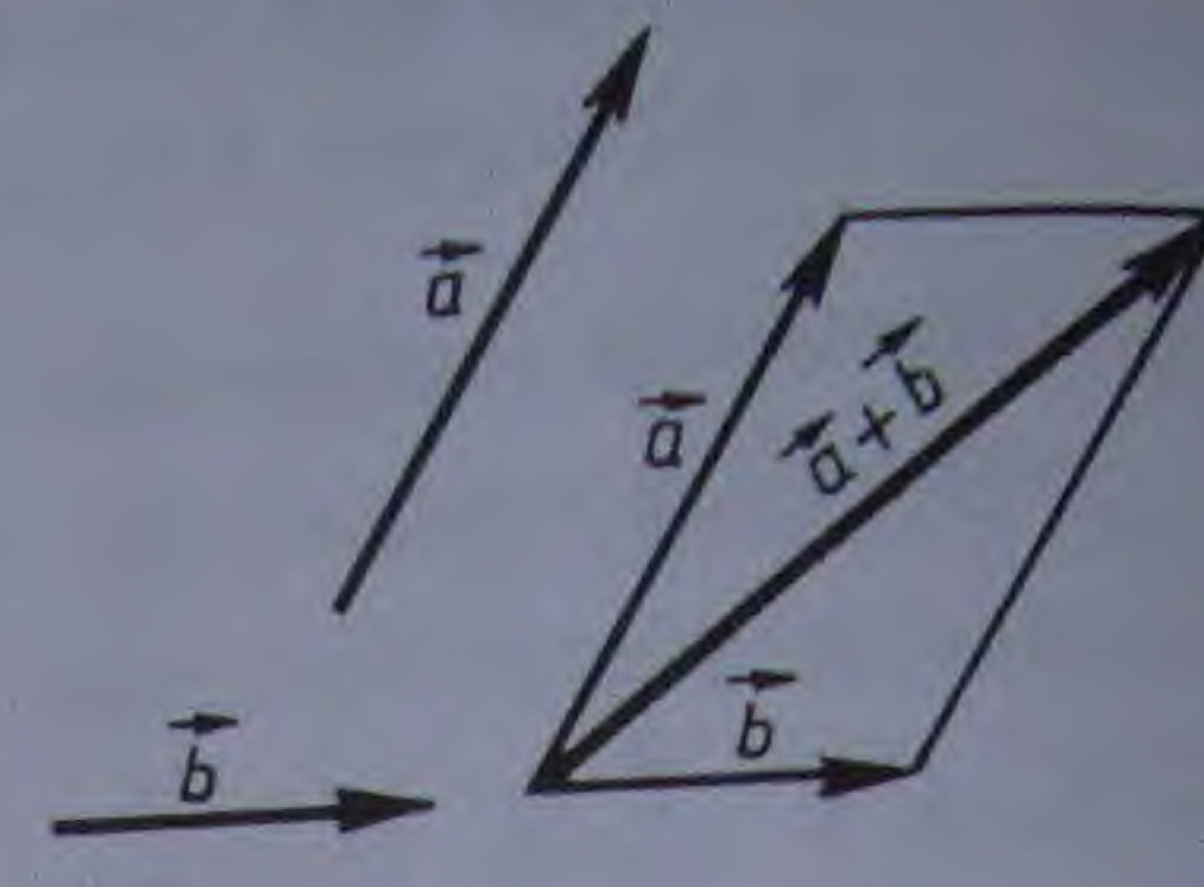


գ)

Նկ. 99



Նկ. 100



Նկ. 101

Նկար 101-ում այդ կանոնը պարզաբանված է:

Վեկտորների գումարման՝ հարթաչափության մեջ ուսումնասիրված հատկությունները տեղի ունեն նաև տարածության մեջ դիտարկվող վեկտորների համար: Վերհիշենք դրանք:

Ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (տեղափոխական օրենք),

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (զուգորդական օրենք):

Երկու ոչ զրոյական վեկտորներ կոչվում են **հակադիր,** եթե նրանց երկարությունները հավասար են, և նրանք հակուղղված են: Զրոյական վեկտորին հակադիր է համարվում զրոյական վեկտորը: Ակնհայտ է, որ $\overrightarrow{BA}$ վեկտորը հակադիր է $\overrightarrow{AB}$ վեկտորին (նկ. 102):

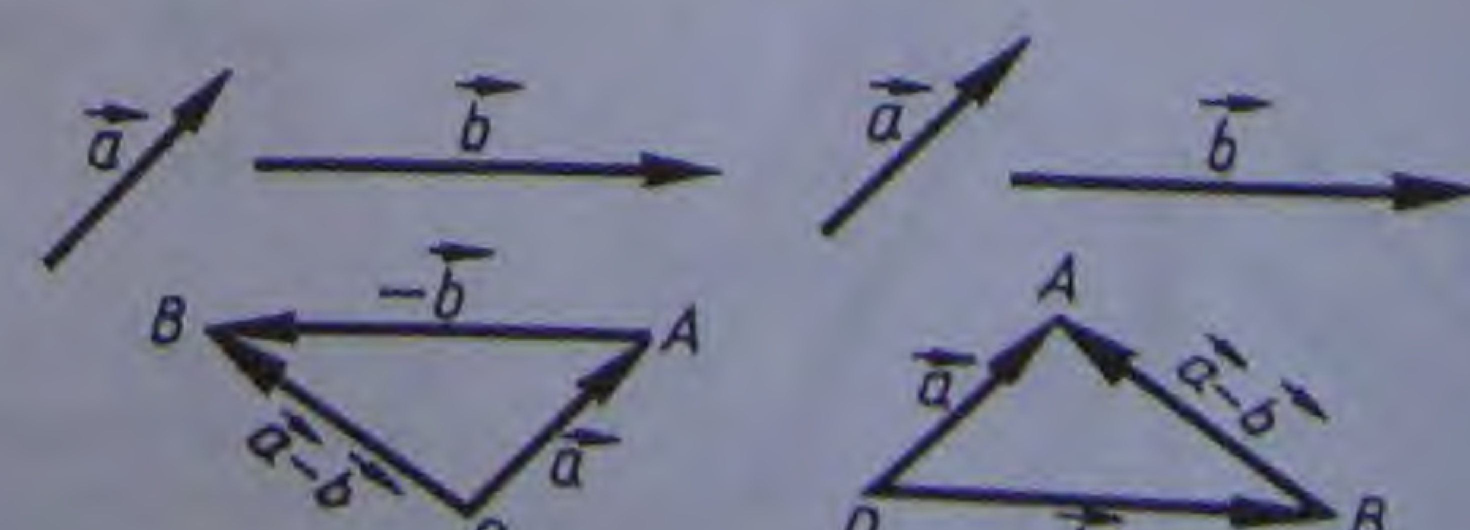
$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերություն կոչվում է այն վեկտորը, որի գումարը $\vec{b}$ վեկտորի հետ հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների $\vec{a}-\vec{b}$ տարբերությունը կարելի է գտնել

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right) \qquad (1)$$

բանաձևով, որտեղ $(-\vec{b})$-ն $\vec{b}$ վեկտորի հակադիր վեկտորն է:

$\overrightarrow{AB}$-ն և $\overrightarrow{BA}$-ն հակադիր վեկտորներ են

Նկ. 102



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=-\vec{b}$

$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$

ա)

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$

$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$

բ)

Նկ. 103

103,ա,բ նկարներում ներկայացված են տրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը կառուցելու երկու եղանակ:

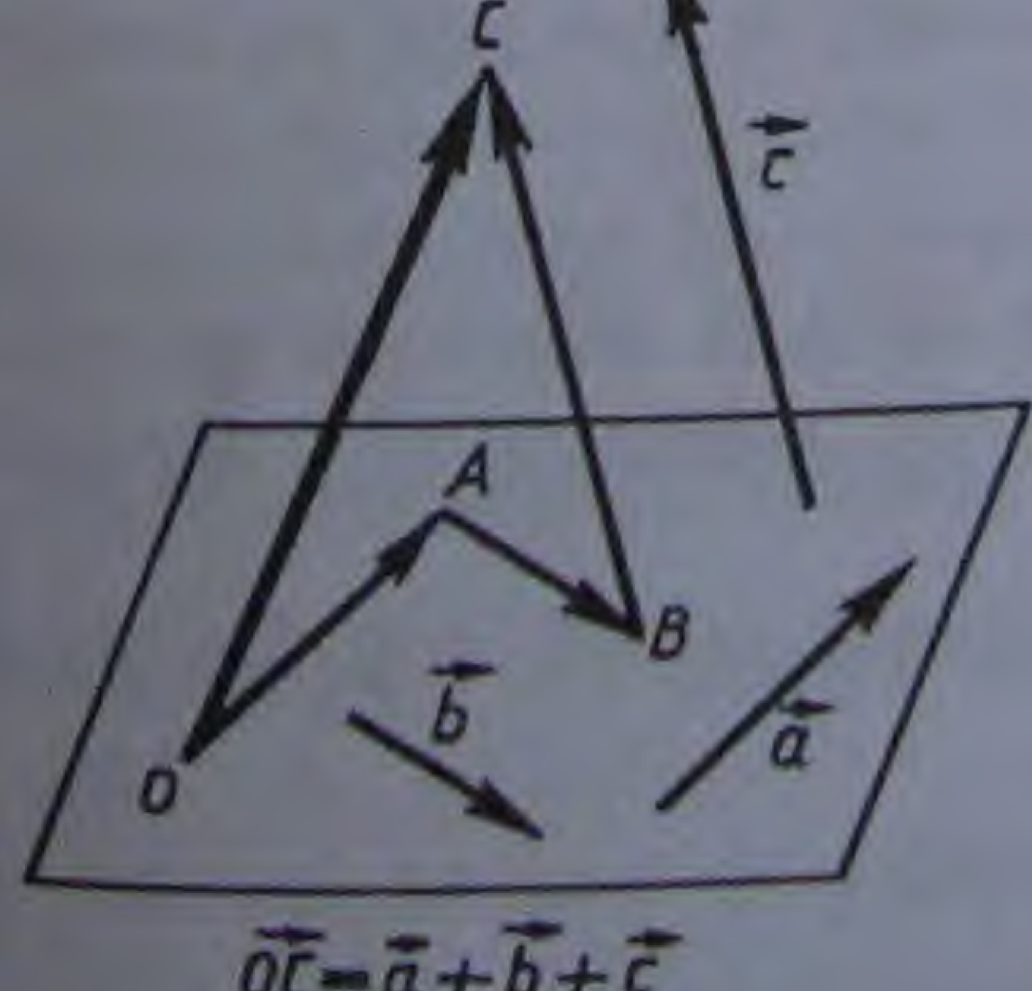
Տարածության մեջ վեկտորների համար գումարման օրենքների և (1) հավասարության ապացուցումները գրեթե չեն տարբերվում հարթության վրա վեկտորների համար կատարված ապացուցումներից:

37 Մի քանի վեկտորների գումարը

Տարածության մեջ մի քանի վեկտորների գումարումը կատարվում է այնպես, ինչպես արվում է հարթության վրա. նախ՝ առաջին վեկտորը գումարվում է երկրորդին, այնուհետև դրանց գումարը՝ երրորդ վեկտորին և այլն: Վեկտորների գումարման օրենքներից հետևում է, որ **մի քանի վեկտորների գումարը կախում չունի այն բանից, թե ինչ հերթականությամբ են նրանք գումարվում:**

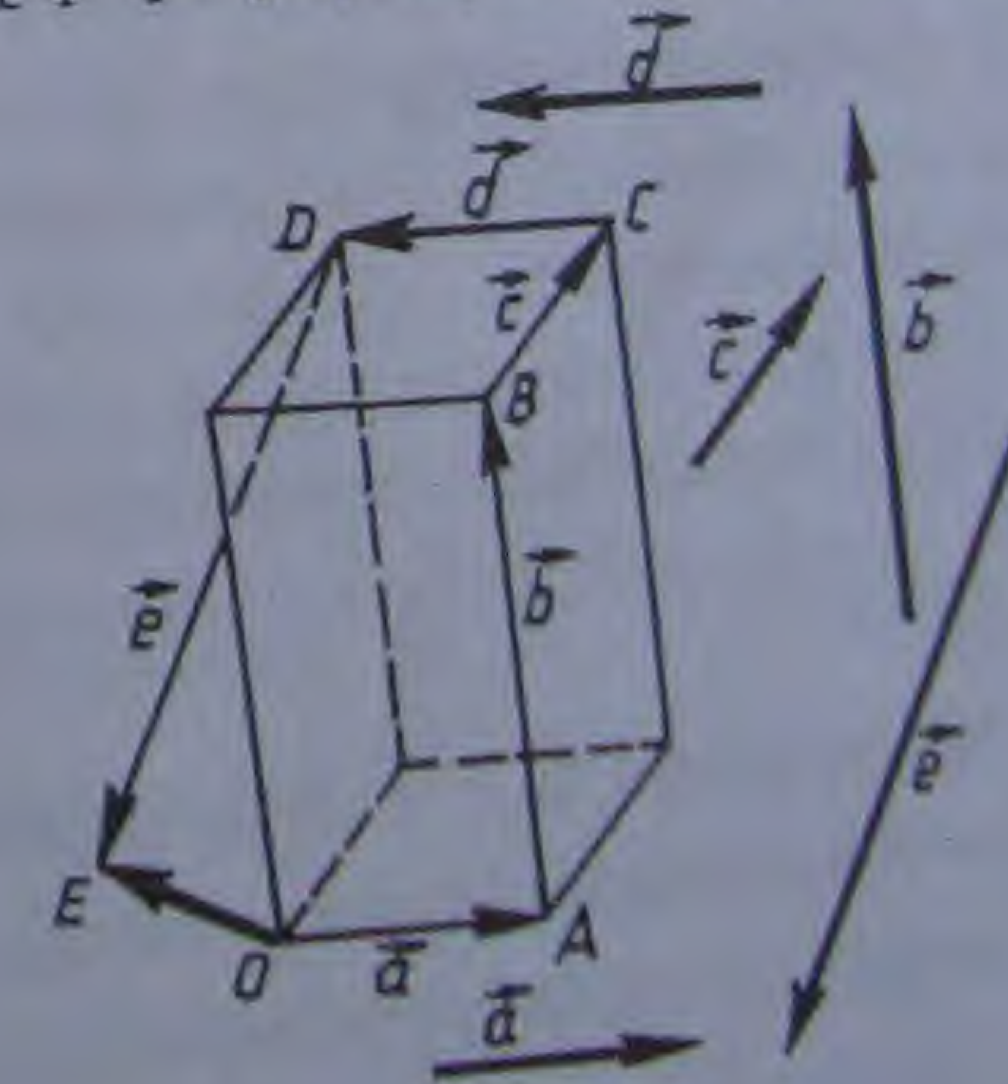
Նկար 104-ում ցուցադրված է $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ երեք վեկտորների գումարի կառուցումը. նախ՝ կամայական O կետից տեղադրված է $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ վեկտորը, հետո՝ A կետից տեղադրված է $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ վեկտորը և, վերջապես, B կետից տեղադրված է $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ վեկտորը: Արդյունքում ստացված է $\overrightarrow{OC}$ վեկտորը, որը հավասար է $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ գումարին:

Համանման ձևով կարելի է կառուցել ցանկացած թվով վեկտորների գումարը: Նկար 105-ում կառուցված է $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ հինգ վեկտորների գումարը՝ $\overrightarrow{OE}$ վեկտորը: Մի քանի վեկտորների գումարման այս կանոնը կոչվում է **բազմանկյան կանոն:** Սակայն նկատենք, որ տարածության մեջ մի քանի վեկտորների գումար կառուցելիս առաջացած «բազմանկյունը», ի տարբերություն հարթության վրա կառուցվածի, կարող է լինել տարածական, այսինքն այնպիսին, որի ոչ բոլոր գագաթներն են ընկած միևնույն

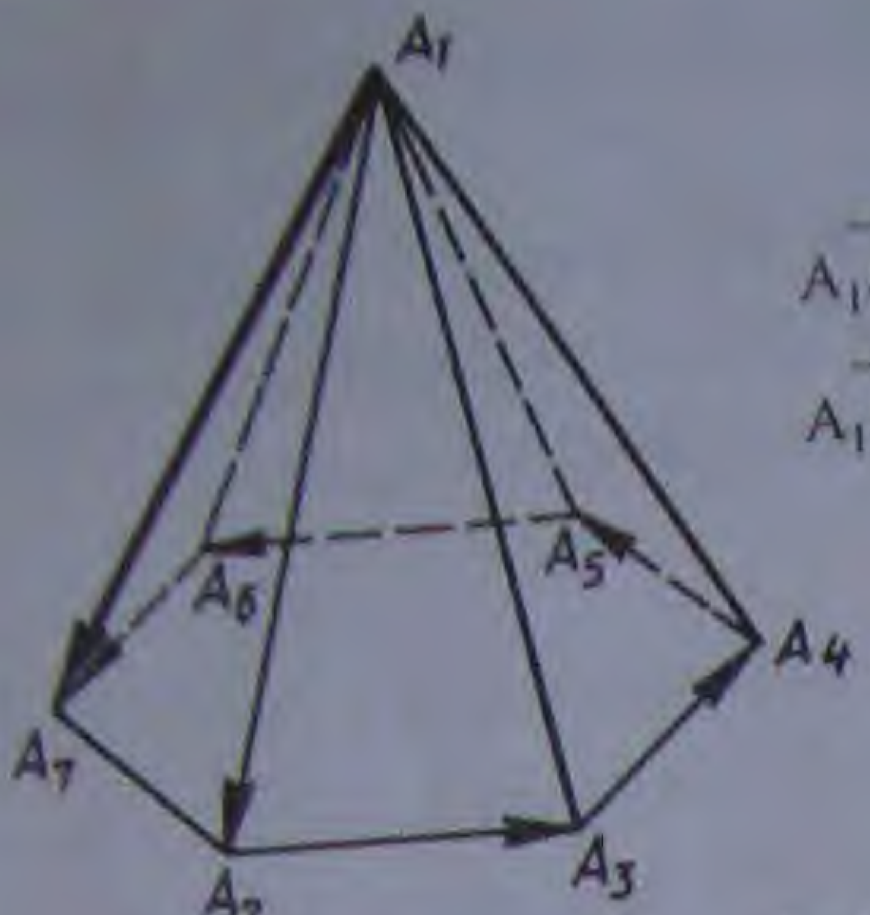


$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

Նկ. 104



Նկ. 105



$$\vec{A_1A_2}+\vec{A_2A_3}+\vec{A_3A_4}+\vec{A_4A_5}+\vec{A_5A_6}+\vec{A_6A_7}=\vec{A_1A_7}$$

$$\vec{A_1A_2}+\vec{A_2A_3}+\vec{A_3A_4}+\vec{A_4A_5}+\vec{A_5A_6}+\vec{A_6A_1}=\vec{0}$$

Նկ. 106

հարթության մեջ: Այդպիսին է, օրինակ, նկար 104-ում պատկերված $OABC$ «քառանկյունը», որի միջոցով կառուցվել է $\vec{OC}$ վեկտորը:

Բազմանկյան կանոնը կարելի է ձևակերպել նաև այսպես. կամայական $A_1, A_2, \ldots, A_n$ կետերի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$\vec{A_1A_2}+\vec{A_2A_3}+\ldots+\vec{A_{n-1}A_n}=\vec{A_1A_n}:$$

Այս կանոնը լուսաբանված է նկար 106-ում (n=7 դեպքի համար): Նկատենք, որ եթե A_1 և A_n կետերը (այսինքն՝ առաջին վեկտորի սկիզբը և վերջին վեկտորի վերջը) համընկնում են, ապա այդ վեկտորների գումարը հավասար է զրոյական վեկտորի:

(38) Վեկտորի բազմապատկումը թվով

Ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալ կոչվում է այն $\vec{b}$ վեկտորը, որի երկարությունը հավասար է $|k|\cdot|\vec{a}|$, ընդ որում՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են՝ $k\geq 0$ դեպքում, և հակուղղված են՝ $k<0$ դեպքում: Զրոյական վեկտորի և կամայական թվի արտադրյալ համարվում է զրոյական վեկտորը:

$\vec{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալը նշանակվում է $k\vec{a}$: Վեկտորի և թվի արտադրյալի սահմանումից հետևում է, որ **ցանկացած k թվի և ցանկացած $\vec{a}$ վեկտորի համար $\vec{a}$ և $k\vec{a}$ վեկտորները համագիծ են:** Այդ սահմանումից նաև հետևում է, որ **ցանկացած վեկտորի և զրո թվի արտադրյալը զրոյական վեկտոր է:**

Վերհիշենք վեկտորը թվով բազմապատկման հիմնական հատկությունները, որոնք մեզ հայտնի են հարթության վրա վեկտորների համար: Դրանք տեղի ունեն նաև տարածության մեջ դիտարկվող վեկտորների համար:

Ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$ վեկտորների և ցանկացած k, ℓ թվերի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

$(k\ell)\vec{a}=k(\ell\vec{a})$ (զուգորդական օրենք),

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (առաջին բաշխական օրենք),

$(k+\ell)\vec{a}=k\vec{a}+\ell\vec{a}$ (երկրորդ բաշխական օրենք):

Նշենք, որ $(-1)\vec{a}$-ն վեկտոր է, որը հակադիր է $\vec{a}$ վեկտորին, այսինքն՝ $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$: Իսկապես, $(-1)\vec{a}$ և $\vec{a}$ վեկտորների երկարությունները հավասար են. $|(-1)\vec{a}|=|-1|\cdot|\vec{a}|=|\vec{a}|$: Դրա հետ մեկտեղ՝ եթե $\vec{a}$-ն ոչ զրոյական վեկտոր է, ապա $(-1)\vec{a}$ և $\vec{a}$ վեկտորները հակուղղված են:

Համանման ձևով՝ ինչպես արվում է հարթաչափության մեջ, կարելի է ապացուցել, որ **եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, և $\vec{a}\neq\vec{0}$, ապա գոյություն ունի այնպիսի k թիվ, որ $\vec{b}=k\vec{a}$:**

Խնդիրներ

327. Նկար 97-ում պատկերված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: Անվանեք այն վեկտորը, որի սկիզբն ու վերջը զուգահեռանիստի գագաթներ են, և որը հավասար է հետևյալ վեկտորների գումարին.

ա) $\vec{AB}+\vec{A_1D_1}$, **բ)** $\vec{AB}+\vec{AD_1}$, **գ)** $\vec{DA}+\vec{B_1B}$, **դ)** $\vec{DD_1}+\vec{DB}$,

ե) $\vec{DB_1}+\vec{BC}$:

328. Տրված է $ABCD$ քառանիստը: Ապացուցեք, որ.

ա) $\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AC}+\vec{CD}$,

բ) $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{DC}+\vec{AD}$,

գ) $\vec{DC}+\vec{BD}=\vec{AC}+\vec{BA}$:

329. Անվանեք այն բոլոր վեկտորները, որոնք ստացվում են $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի կողերից և. **ա)** հակադիր են $\vec{CB}$ վեկտորին, **բ)** հակադիր են $\vec{B_1A}$ վեկտորին, **գ)** հավասար են $-\vec{DC}$ վեկտորին, **դ)** հավասար են $-\vec{A_1B_1}$ վեկտորին:

330. Նկարեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստ և $\vec{C_1D_1}$, $\vec{BA_1}$, $\vec{AD}$ վեկտորները նշանակեք, համապատասխանաբար, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: Նկարի վրա պատկերեք հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{a}-\vec{b}$, **բ)** $\vec{a}-\vec{c}$, **գ)** $\vec{b}-\vec{a}$, **դ)** $\vec{c}-\vec{b}$, **ե)** $\vec{c}-\vec{a}$:

331. Դիցուք՝ $ABCD$-ն զուգահեռագիծ է, իսկ O-ն՝ տարածության կամայական կետ: Ապացուցեք, որ. **ա)** $\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{OC}-\vec{OD}$, **բ)** $\vec{OB}-\vec{OC}=\vec{DA}$:

332. Նկար 97-ում պատկերված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: $\vec{AB_1}$ և $\vec{DK}$ վեկտորները ներկայացրեք երկու այնպիսի վեկտորների տարբերության տեսքով, որոնց սկիզբն ու վերջը համընկնում են նկարում նշված կետերին:

333. Տարածության մեջ տրված են չորս կետեր՝ A-ն, B-ն, C-ն, D-ն: Անվանեք այն վեկտորը, որի սկիզբն ու վերջը տրված այդ կետերում են, և որը հավասար է հետևյալ վեկտորների գումարին.

ա) $(\vec{AB}+\vec{CA}+\vec{DC})+(\vec{BC}+\vec{CD})$, **բ)** $(\vec{AB}-\vec{AC})+\vec{DC}$:

334. Տրված է $KLMNK_1L_1M_1N_1$ ուղղանկյունանիստը: Ապացուցեք, որ

ա) $\left|\vec{MK}+\vec{MM_1}\right|=\left|\vec{MK}-\vec{MM_1}\right|$, **բ)** $\left|\vec{K_1L_1}-\vec{NL_1}\right|=\left|\vec{ML}+\vec{MM_1}\right|$,

գ) $\left|\vec{NL}-\vec{M_1L}\right|=\left|\vec{K_1N}-\vec{LN}\right|$:

335. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\vec{AB}+\vec{MN}+\vec{BC}+\vec{CA}+\vec{PQ}+\vec{NM}$,

բ) $\vec{FK}+\vec{MQ}+\vec{KP}+\vec{AM}+\vec{QK}+\vec{PF}$,

գ) $\vec{KM}+\vec{DF}+\vec{AC}+\vec{FK}+\vec{CD}+\vec{CA}+\vec{MP}$,

դ) $\vec{AB}+\vec{BA}+\vec{CD}+\vec{MN}+\vec{DC}+\vec{NM}$:

336. Տրված են A, B, C և D կետերը: $\vec{AB}$ վեկտորը ներկայացրեք հետևյալ վեկտորների հանրահաշվական գումարի տեսքով. **ա)** $\vec{AC}$, $\vec{DC}$, $\vec{BD}$, **բ)** $\vec{DA}$, $\vec{DC}$, $\vec{CB}$, **գ)** $\vec{DA}$, $\vec{CD}$, $\vec{BC}$:

337. Պարզեցրեք արտահայտությունը. **ա)** $\vec{OP}-\vec{EP}+\vec{KD}-\vec{KA}$, **բ)** $\vec{AD}+\vec{MP}+\vec{EK}-\vec{EP}-\vec{MD}$, **գ)** $\vec{AC}-\vec{BC}-\vec{PM}-\vec{AP}+\vec{BM}$:

338. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: Ապացուցեք, որ $\vec{OA}+\vec{OC_1}=\vec{OC}+\vec{OA_1}$, որտեղ O-ն տարածության կամայական կետ է:

339. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: Նշեք զուգահեռանիստի գագաթներում սկիզբ ու վերջ ունեցող $\vec{x}$ վեկտոր, այնպիսին, որ.

ա) $\vec{DC}+\vec{D_1A_1}+\vec{CD_1}+\vec{x}+\vec{A_1C_1}=\vec{DB}$,

բ) $\vec{DA}+\vec{x}+\vec{D_1B}+\vec{AD_1}+\vec{BA}=\vec{DC}$:

340. Տրված է $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզման: Նշեք պրիզմայի գագաթներում սկիզբ ու վերջ ունեցող $\vec{x}$ վեկտոր, այնպիսին, որ.

ա) $\vec{AA_1}+\vec{B_1C}-\vec{x}=\vec{BA}$,

բ) $\vec{AC_1}-\vec{BB_1}+\vec{x}=\vec{AB}$,

գ) $\vec{AB_1}+\vec{x}=\vec{AC}-\vec{x}+\vec{BC_1}$:

341. P գագաթով քառանկյուն բուրգի հիմքը $ABCD$ սեղանն է: O կետը սեղանի միջին գծի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ $\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}+\vec{PD}==4\vec{PO}$:

342. P կետը կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի գագաթն է:Ապացուցեք, որ բուրգի կողմնային կողերով առաջացած, P սկզբնակետով բոլոր վեկտորների գումարը հավասար է նույն P սկզբնակետով բոլոր այն վեկտորների գումարին, որոնք առաջանում են բուրգի հարթագծերով:

343. Հայտնի է, որ $\vec{AO}=\frac{1}{2}\vec{AB}$: Ապացուցեք, որ A և B կետերը համաչափ են O կետի նկատմամբ:

344. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի անկյունագծերը հատվում են O կետում: Գտեք այնպիսի k թիվ, որ. ա) $\vec{AB}=k\cdot\vec{CD}$, բ) $\vec{AC_1}=k\cdot\vec{AO}$,

գ) $\vec{OB_1}=k\cdot\vec{B_1D}$:

345. E և F կետերը $ABCD$ զուգահեռագծի AB և BC կողմերի միջնակետերն են, իսկ O-ն տարածության կամայական կետ է: Արտահայտեք. ա) $\vec{OA}-\vec{OC}$ վեկտորը $\vec{EF}$ վեկտորով, բ) $\vec{OA}-\vec{OE}$ վեկտորը $\vec{DC}$ վեկտորով:

346. M և N կետերը $ABCD$ սեղանի AB և CD հիմքերի միջնակետերն են, իսկ O-ն տարածության կամայական կետ է: $\vec{OM}-\vec{ON}$ վեկտորն արտահայտեք $\vec{AD}$ և $\vec{BC}$ վեկտորներով:

347. Պարզեցրեք.

ա) $2(\vec{m}+\vec{n})-3(4\vec{m}-\vec{n})+\vec{m}$,

բ) $\vec{m}-3(\vec{n}-2\vec{m}+\vec{p})+5(\vec{p}-4\vec{m})$:

348. Ապացուցեք, որ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստում $\vec{AC_1}+\vec{B_1D}=2\vec{BC}$:

349. A, B և M երեք կետերը բավարարում են $\vec{AM}=\lambda\cdot\vec{MB}$ պայմանին, որտեղ $\lambda\neq-1$: Ապացուցեք, որ այդ կետերն ընկած են մի ուղղի վրա, և տարածության ցանկացած O կետի համար տեղի ունի $\vec{OM}=\dfrac{\vec{OA}+\lambda\cdot\vec{OB}}{1+\lambda}$ հավասարությունը:

Լ ու ծ ու մ: $\vec{AM}=\lambda\cdot\vec{MB}$ հավասարությունից հետևում է, որ $\vec{AM}$ և $\vec{MB}$ վեկտորները համագիծ են: Ուրեմն՝ AM և MB ուղիղները կա՛մ զուգահեռ են, կա՛մ համընկնում են: Քանի որ այդ ուղիղներն ունեն ընդհանուր M կետ, ապա նրանք համընկնում են և, հետևաբար, A, B և M կետերն ընկած են մի ուղղի վրա: Քանի որ $\vec{AM}=\vec{OM}-\vec{OA}$, $\vec{MB}=\vec{OB}-\vec{OM}$, ապա $\vec{AM}=\lambda\cdot\vec{MB}$ հավասարությունից ստացվում է $\vec{OM}-\vec{OA}=\lambda\cdot\left(\vec{OB}-\vec{OM}\right)$, կամ՝ $(1+\lambda)\vec{OM}=\vec{OA}+\lambda\cdot\vec{OB}$: Սրանից, բաժանելով $1+\lambda$-ի վրա, ստացվում է պահանջվող հավասարությունը:

350. Հայտնի է, որ $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, ընդ որում՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$, և $\vec{c}$ վեկտորները զույգ առ զույգ համուղղված չեն: Ապացուցեք, որ $|\vec{p}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$:

351. $\vec{a}$ և $\vec{c}$ վեկտորները, ինչպես նաև $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները համագիծ են: Ապացուցեք, որ համագիծ են նաև հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{a}+\vec{b}$ և $\vec{c}$, **բ)** $\vec{a}-\vec{b}$ և $\vec{c}$, **գ)** $\vec{a}+3\vec{b}$ և $\vec{c}$, **դ)** $-\vec{a}+2\vec{b}$ և $\vec{c}$:

352. $\vec{a}+\vec{b}$ և $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են: Ապացուցեք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են:

353. $\vec{a}+2\vec{b}$ և $\vec{a}-3\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են: Ապացուցեք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են:

354. Ապացուցեք, որ եթե $\vec{a}+\vec{b}$ և $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորները համագիծ չեն, ապա համագիծ չեն նաև հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{a}$ և $\vec{b}$, **բ)** $\vec{a}+2\vec{b}$ և $2\vec{a}-\vec{b}$:

§ 3 Համահարթ վեկտորներ

38 Համահարթ վեկտորներ

Վեկտորները կոչվում են **համահարթ**, եթե միևնույն կետից տեղադրելիս նրանք կընկնեն մի հարթության մեջ: Այլ խոսքով՝ վեկտորները համահարթ են կոչվում, եթե գոյություն ունեն դրանց հավասար վեկտորներ, որոնք ընկած են մի հարթության մեջ:

Պարզ է, որ ցանկացած երկու վեկտորներ համահարթ են: Համահարթ են նաև երեք այնպիսի վեկտորները, որոնցից որևէ երկուսը համագիծ են (պարզաբանեք՝ ինչու): Մինչդեռ կամայական երեք վեկտորները կարող են լինել համահարթ, կարող են և համահարթ չլինել (այսինքն՝ լինեն **տարահարթ**): Նկար 107-ում պատկերված է զուգահեռանիստ: $\vec{BB_1}$, $\vec{OD}$ և $\vec{OE}$ վեկտորները համահարթ են, քանի որ $\vec{BB_1}$-ին հավասար վեկտորը O կետից տեղադրելիս ստացվում է $\vec{OC}$ վեկտորը, իսկ $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ և $\vec{OE}$ վեկտորներն ընկած են միևնույն OCE հարթության մեջ: $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ և $\vec{OC}$ վեկտորները տարահարթ են, քանի որ $\vec{OC}$ վեկտորն ընկած չէ OAB հարթության մեջ:

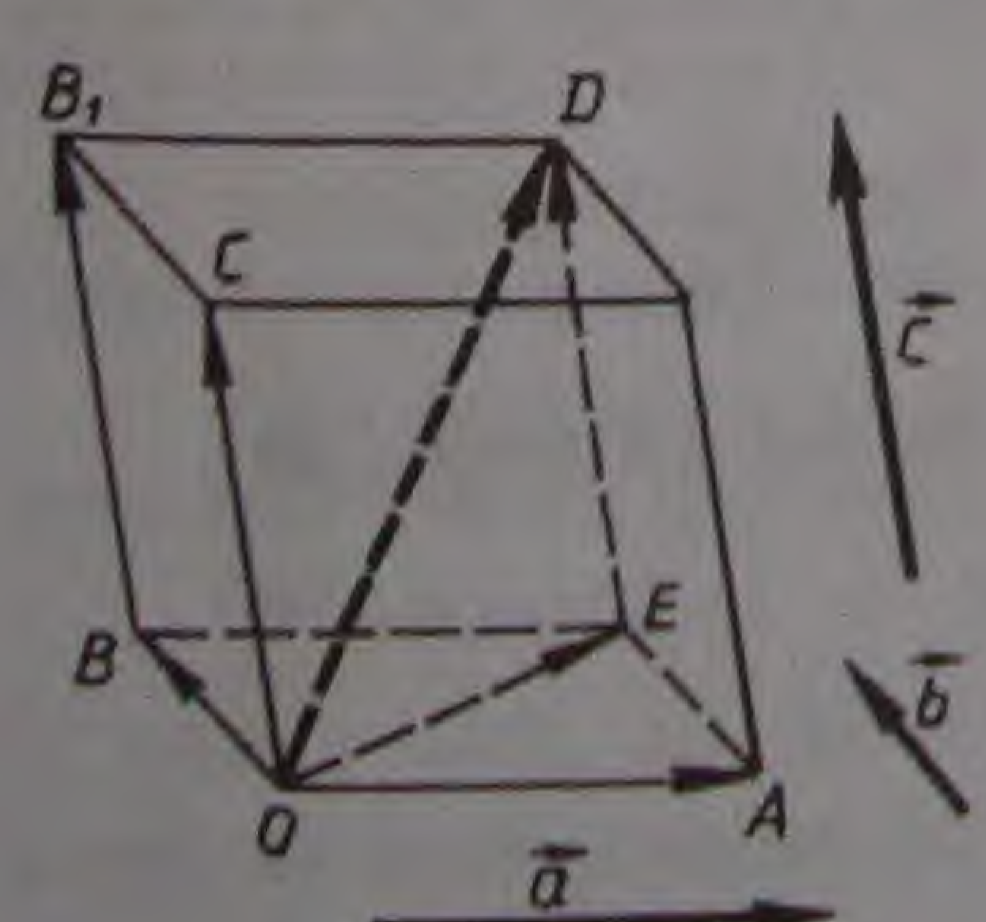
Դիտարկենք երեք վեկտորների համահարթության հայտանիշը:

Եթե $\vec{c}$ վեկտորը կարելի է վերածել ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների, այսինքն՝ կարելի է ներկայացնել

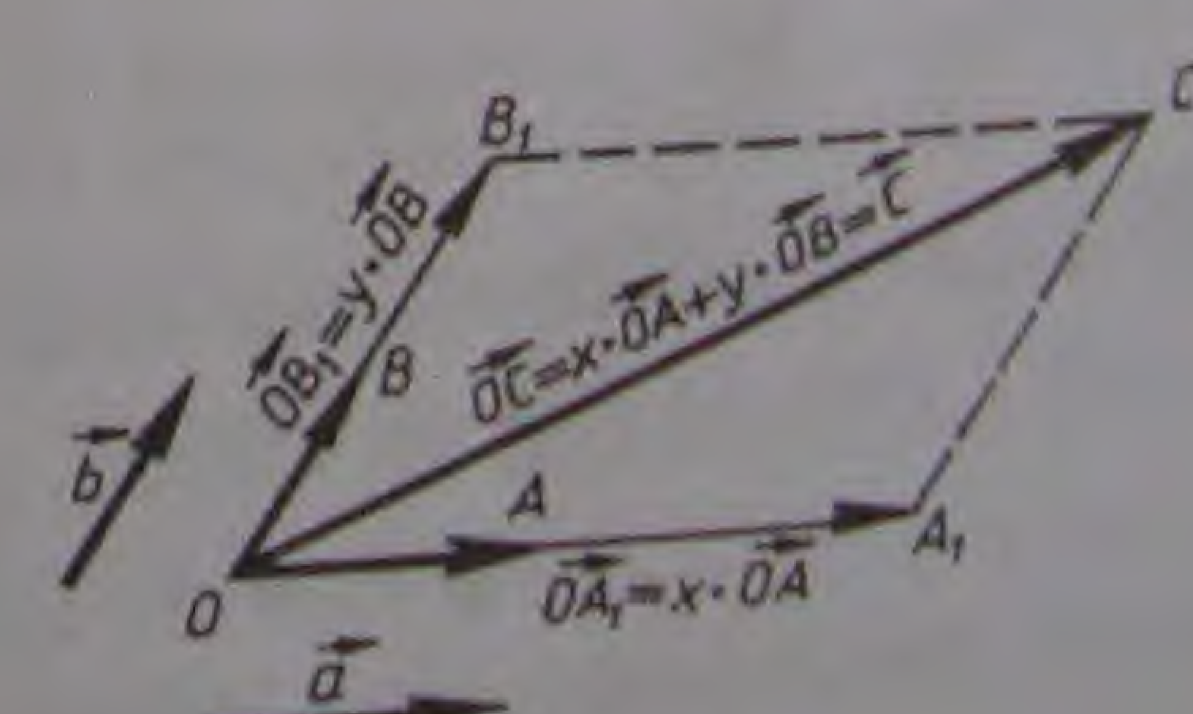
$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \qquad (1)$$

տեսքով, որտեղ x-ը և y-ը որևէ թվեր են, ապա $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են:

Ապացուցենք այս հայտանիշը: Ընդունենք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ չեն (եթե $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն համագիծ են, ապա $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների



Նկ. 107



Նկ. 108

համահարթ լինելն ակնհայտ է): Կամայական O կետից տեղադրենք $\vec{OA}=\vec{a}$ և $\vec{OB}=\vec{b}$ վեկտորները (նկ. 108): $\vec{OA}$ և $\vec{OB}$ վեկտորներն ընկած են OAB հարթության մեջ: Ակնհայտ է, որ այդ նույն հարթության մեջ են ընկած նաև $\vec{OA_1}=x\cdot\vec{OA}$ և $\vec{OB_1}=y\cdot\vec{OB}$ վեկտորները, հետևաբար՝ նաև դրանց գումարը՝ $\vec{OC}=x\cdot\vec{OA}+y\cdot\vec{OB}$ վեկտորը, որն էլ հավասար է $\vec{c}$ վեկտորին: Այսպիսով՝ $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ և $\vec{OC}=\vec{c}$ վեկտորներն ընկած են մի հարթության մեջ, այսինքն՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են:

Ճշմարիտ է նաև հակադարձ պնդումը, այն է՝ **եթե $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտոր-ները համահարթ են, իսկ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են, ապա $\vec{c}$ վեկտորը կարելի է վերածել ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների** (այսինքն՝ ներկա-յացնել (1) տեսքով), **ընդ որում՝ վերածման գործակիցները** (այսինքն՝ x և y թվերը (1) բանաձևում) **որոշվում են միակ կերպով:** Այս պնդումն ապացուցեք ինքնուրույն՝ օգտվելով հարթաչափության դասընթացից հայտնի այն թեորեմից, որը վերաբերում է վեկտորն ըստ երկու տարագիծ վեկտորների վերածելուն (տե՛ս 8-րդ դաս. դասագրքի 47-րդ կետը):

40 Զուգահեռանիստի կանոնը

Երեք տարահարթ վեկտորներ գումարելու համար կարելի է օգտվել, այսպես կոչված, **զուգահեռանիստի կանոնից:** Դա նկարագրենք: Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն, $\vec{b}$-ն և $\vec{c}$-ն տարահարթ վեկտորներ են: Տարածության կամայական O կետից տեղադրենք $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ և $\vec{OC}=\vec{c}$ վեկտորները և կառուցենք զուգահեռանիստ՝ այնպես, որ OA, OB և OC հատվածները լինեն նրա կողերը (տե՛ս նկ. 107): Այդ դեպքում զուգահեռանիստի OD անկյունագծով էլ հենց պատկերվում է $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների գումարը՝ $\vec{OD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$: Իսկապես,

$$\vec{OD}=\vec{OE}+\vec{ED}=(\vec{OA}+\vec{AE})+\vec{ED}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}:$$

41 Վեկտորի վերածումն ըստ երեք տարահարթ վեկտորների

Եթե $\vec{p}$ վեկտորը ներկայացված է

$$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c} \qquad (2)$$

տեսքով, որտեղ x-ը, y-ը, z-ը որևէ թվեր են, ապա ասում են, որ **$\vec{p}$ վեկտորը վերածված է ըստ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների:** x, y, z թվերը կոչվում են **վերածման գործակիցներ:**

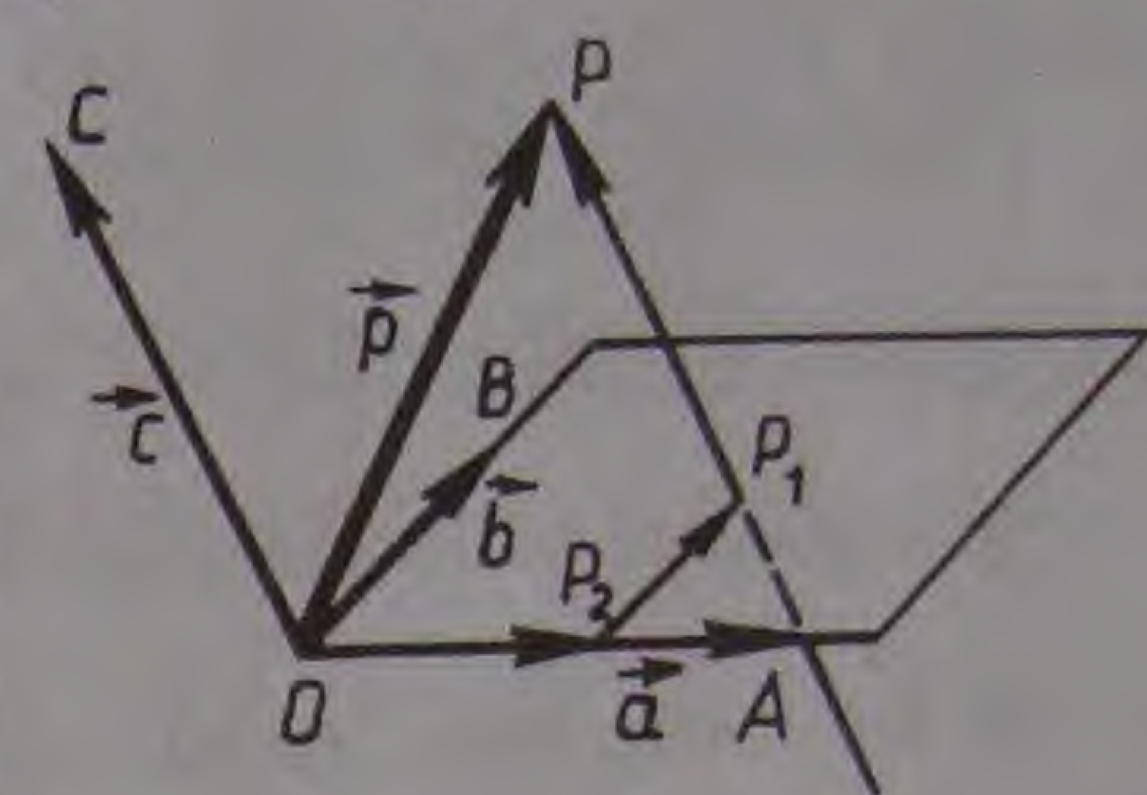
Ապացուցենք թեորեմ վեկտորն ըստ երեք տարահարթ վեկտորների վերածելու մասին:

Թ ե ո ր ե մ : ***Յանկացած վեկտոր կարելի է վերածել ըստ տրված երեք տարահարթ վեկտորների, ընդ որում վերածման գործակիցները որոշվում են միակ կերպով:***

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ : Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն, $\vec{b}$-ն և $\vec{c}$-ն տրված տարահարթ վեկտորներն են: Նախ ապացուցենք, որ ամեն մի $\vec{p}$ վեկտոր կարելի է ներկայացնել (2) տեսքով:

Նշենք կամայական մի O կետ և այդ կետից տեղադրենք հետևյալ վեկտորները (նկ. 109).

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}\,,\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}\,,\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}\,,\ \overrightarrow{OP} = \vec{p}\,: \qquad (3)$$



Նկ. 109

P կետով տանենք OC ուղղին զուգահեռ ուղիղ և P_1-ով նշանակենք այդ ուղղի և AOB հարթության հատման կետը (եթե $P \in OC$, ապա իբրև P_1 կետ կվերցնենք O կետը): Այնուհետև P_1 կետով տանենք ուղիղ՝ OB ուղղին զուգահեռ, և P_2-ով նշանակենք այդ ուղղի և OA ուղղի հատման կետը (եթե $P_1 \in OB$, ապա իբրև P_2 կետ կվերցնենք O կետը): Ըստ բազմանկյան կանոնի՝

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}\,: \qquad (4)$$

Նկատենք, որ $\overrightarrow{OP_2}$ և $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ և $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$ և $\overrightarrow{OC}$ վեկտորները (ըստ զույգերի) համագիծ են, ուրեմն՝ գոյություն ունեն x, y, z թվեր՝ այնպիսին, որ $\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$: Այս արտահայտությունները տեղադրելով (4) հավասարության մեջ՝ ստացվում է

$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$:

Դրանից, նկատի ունենալով (3) հավասարությունները, հանգում ենք (2) հավասարությանը:

Այժմ ապացուցենք, որ վերածման գործակիցները (2) բանաձևում որոշվում են միակ կերպով:

Ենթադրենք, թե $\vec{p}$ վեկտորի համար (2) վերածման հետ մեկտեղ գոյություն ունի նաև մի վերածում՝ $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$: Այս հավասարությունը հանելով (2) հավասարությունից և օգտագործելով վեկտորների հետ գործողությունների հատկությունները՝ ստանում ենք

$$\vec{0} = (x - x_1)\,\vec{a} + (y - y_1)\,\vec{b} + (z - z_1)\,\vec{c}\,:$$

Այս հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ $x-x_1=0$, $y-y_1=0$, $z-z_1=0$: Բանն այն է, որ եթե ենթադրենք, որ, ասենք՝ $z-z_1\neq 0$, ապա ստացված հավասարությունից կհետևեր, որ $\vec{c}=-\frac{x-x_1}{z-z_1}\vec{a}-\frac{y-y_1}{z-z_1}\vec{b}$, ինչը կնշանակեր, որ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են: Բայց դա կհակասեր թեորեմի պայմանին և, ուրեմն, մեր ենթադրությունը ճշմարիտ չէ: Այսպիսով, իրոք, $x-x_1=0$, $y-y_1=0$, $z-z_1=0$, որտեղից՝ $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$: Հետևաբար՝ $\vec{p}$ վեկտորի (2) վերածման գործակիցները որոշվում են միակ կերպով: Թեորեմն ապացուցված է:

Հարցեր և խնդիրներ

355. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: Հետևյալ ո՞ր երեք վեկտորներն են համահարթ. **ա)** $\vec{AA_1}$, $\vec{CC_1}$, $\vec{BB_1}$, **բ)** $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AA_1}$, **գ)** $\vec{B_1B}$, $\vec{AC}$, $\vec{DD_1}$, **դ)** $\vec{AD}$, $\vec{CC_1}$, $\vec{A_1B_1}$:

356. EF հատվածը միացնում է $ABCD$ քառանիստի AC և BD կողերի միջնակետերը: Ապացուցեք, որ $2\vec{FE}=\vec{BA}+\vec{DC}$: Արդյոք համահա՞րթ են $\vec{FE}$, $\vec{BA}$ և $\vec{DC}$ վեկտորները:

357. Տրված են $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռագծերը: Ապացուցեք, որ $\vec{BB_1}$, $\vec{CC_1}$ և $\vec{DD_1}$ վեկտորները համահարթ են:

358. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: Անվանեք այն վեկտորը, որի սկիզբն ու վերջը զուգահեռանիստի գագաթներ են, և որը հավասար է հետևյալ վեկտորների գումարին. **ա)** $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}$, **բ)** $\vec{DA}+\vec{DC}+\vec{DD_1}$, **գ)** $\vec{A_1B_1}+\vec{C_1B_1}+\vec{BB_1}$, **դ)** $\vec{A_1A}+\vec{A_1D_1}+\vec{AB}$, **ե)** $\vec{B_1A_1}+\vec{BB_1}+\vec{BC}$:

359. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: **ա)** $\vec{BD_1}$ վեկտորը վերածեք ըստ $\vec{BA}$, $\vec{BC}$ և $\vec{BB_1}$ վեկտորների: **բ)** $\vec{B_1D_1}$ վեկտորը վերածեք ըստ $\vec{A_1A}$, $\vec{A_1B}$ և $\vec{A_1D_1}$ վեկտորների:

360. a կող ունեցող $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի A_1, B և D գագաթներից յուրաքանչյուրում տեղադրված է q կետային լիցք: **ա)** $\vec{AC_1}$ վեկտորով արտահայտեք դրանց ստեղծած էլեկտրական դաշտի արդյունարար լարվածությունը* A և C_1 կետերում: **բ)** Գտեք արդյունարար լարվածության բացարձակ մեծությունը C, B_1 կետերում, $A_1B_1C_1D_1$ նիստի կենտրոնում և խորանարդի կենտրոնում:

361. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի անկյունագծերը հատվում են O կետում: $\vec{CD}$ և $\vec{D_1O}$ վեկտորները վերածեք ըստ $\vec{AA_1}$, $\vec{AB}$ և $\vec{AD}$ վեկտորների:

362. K կետը $ABCD$ քառանիստի BC կողի միջնակետն է: $\vec{DK}$ վեկտորը վերածեք ըստ $\vec{a}=\vec{DA}$, $\vec{b}=\vec{AB}$, $\vec{c}=\vec{AC}$ վեկտորների:

Լուծում: Քանի որ K կետը BC հատվածի միջնակետն է, ապա

$\vec{DK}=\frac{1}{2}(\vec{DB}+\vec{DC})$: Բայց $\vec{DB}=\vec{DA}+\vec{AB}=\vec{a}+\vec{b}$,

$\vec{DC}=\vec{DA}+\vec{AC}=\vec{a}+\vec{c}$: Ուրեմն՝

$\vec{DK}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}+\vec{c})=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$:

363. O գագաթով բուրգի հիմքը $ABCD$ զուգահեռագիծն է, որի անկյունագծերը հատվում են M կետում: $\vec{OD}$ և $\vec{OM}$ վեկտորները վերածեք ըստ $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OB}$ և $\vec{c}=\vec{OC}$ վեկտորների:

364. K կետը $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի B_1C_1 կողի միջնակետն է: $\vec{AK}$ վեկտորը վերածեք ըստ $\vec{a}=\vec{AB}$, $\vec{b}=\vec{AD}$ և $\vec{c}=\vec{AA_1}$ վեկտորների և գտեք այդ վեկտորի երկարությունը, եթե խորանարդի կողը m է:

365. $ABCD$ զուգահեռագծի հարթությունից դուրս վերցված է O կետ: M կետը AB-ի միջնակետն է, իսկ K կետը՝ MD-ի միջնակետը: $\vec{OM}$ և $\vec{OK}$ վեկտորները վերածեք ըստ $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OB}$, $\vec{c}=\vec{OC}$ վեկտորների:

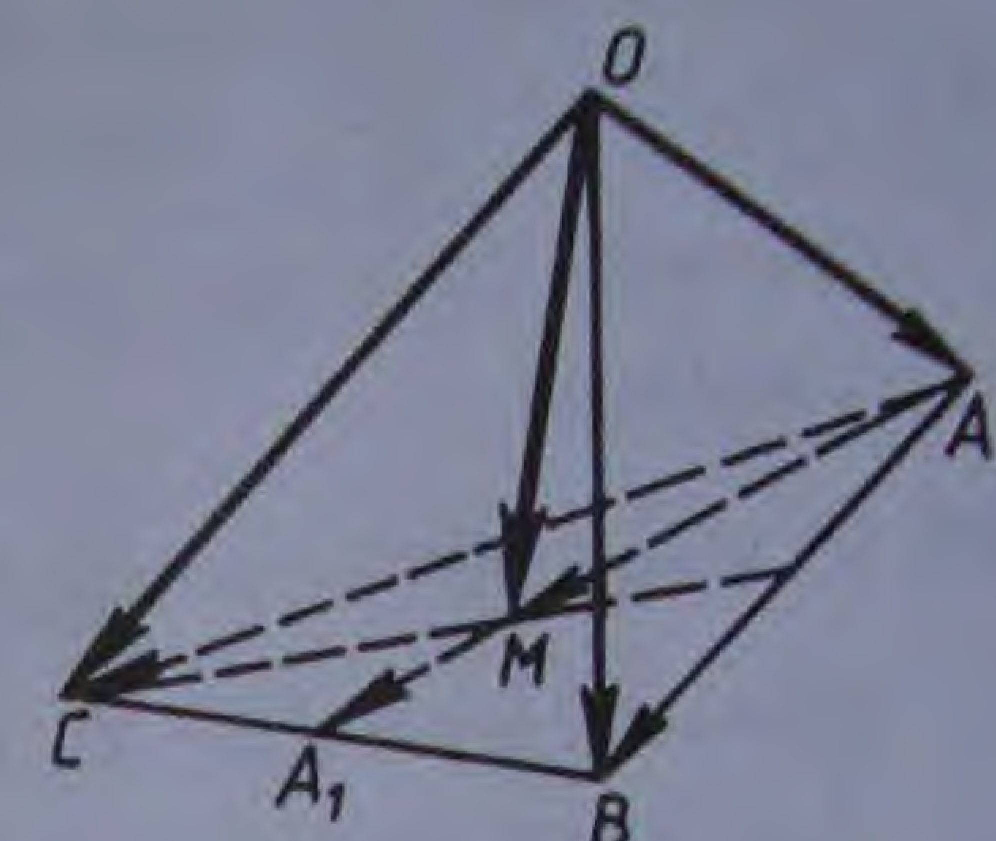
---

* Եթե O կետում գտնվում է q կետային լիցք, ապա նրա ստեղծած էլեկտրական դաշտի $\vec{E}$ լարվածությունը M կետում արտահայտվում է $\vec{E}=\frac{kq}{OM^3}\cdot\vec{OM}$ բանաձևով, որտեղ k գործակիցը կախված է միավորների համակարգի ընտրությունից:

366. Ապացուցեք, որ եթե M-ը ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է, իսկ O-ն՝ տարածության կամայական կետ, ապա

$$\vec{OM}=\frac{1}{3}\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}\right): \qquad (4)$$

Լուծում: Ըստ եռանկյան միջնագծերի հատման կետի մասին թեորեմի՝ $\vec{AM}=2\vec{MA_1}$, որտեղ AA_1-ը ABC եռանկյան միջնագիծն է (նկ. 110): Ըստ խնդիր 349-ի



Նկ.110

$$\vec{OM}=\frac{\vec{OA}+2\vec{OA_1}}{1+2}=\frac{\vec{OA}+2\vec{OA_1}}{3}:$$ Բայց $$\vec{OA_1}=\frac{1}{2}\left(\vec{OB}+\vec{OC}\right)$$ (պարզաբանեք՝ ինչու), ուրեմն՝ $$\vec{OM}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}}{3}:$$

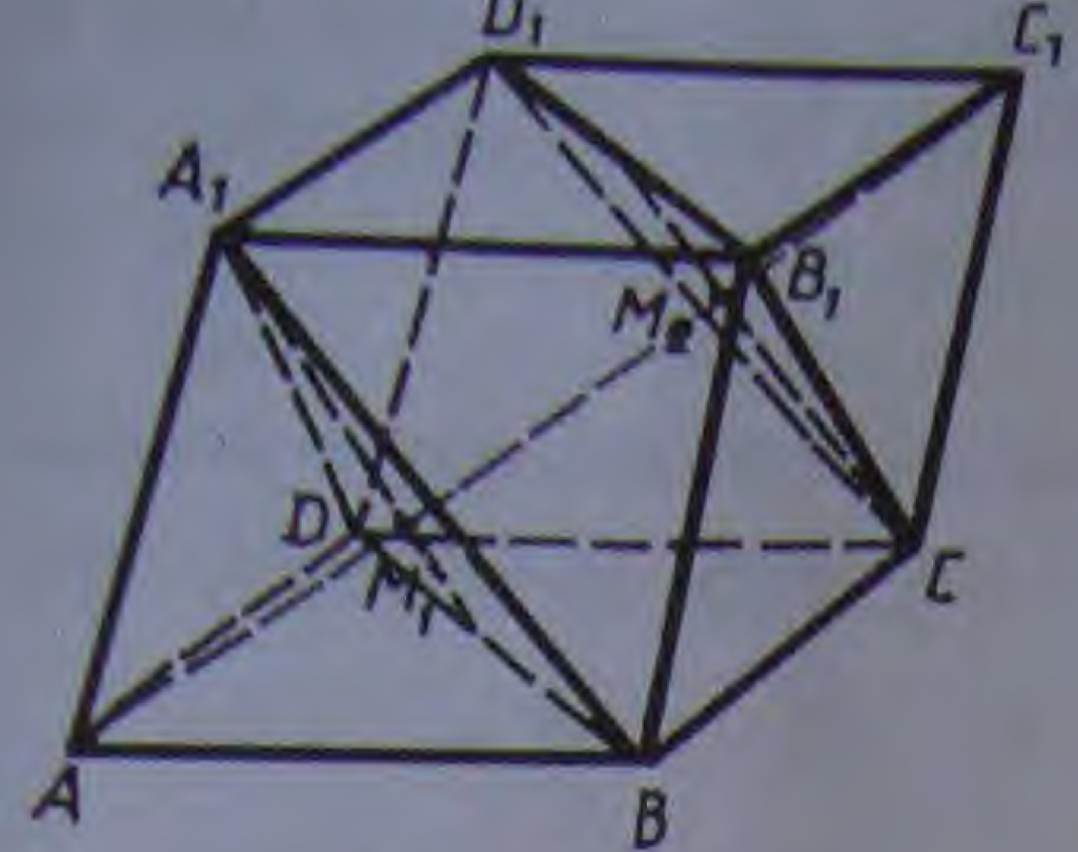
367. $ABCD$ քառանիստում ABC նիստի AA_1 միջնագիծը K կետով տրոհվում է այնպես, որ $AK:KA_1=3:7$: $\vec{DK}$ վեկտորը վերածեք ըստ $\vec{DA}$, $\vec{DB}$, $\vec{DC}$ վեկտորների :

368. M և N կետերը $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի AB և A_1D_1 կողերի միջնակետերն են : Ըստ $\vec{AB}$ և $\vec{AD}$ վեկտորների վերածեք, եթե դա հնարավոր է, հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{AC}$, **բ)** $\vec{CM}$, **գ)** $\vec{C_1N}$, **դ)** $\vec{AC_1}$, **ե)** $\vec{A_1N}$, **զ)** $\vec{AN}$, **է)** $\vec{MD}$:

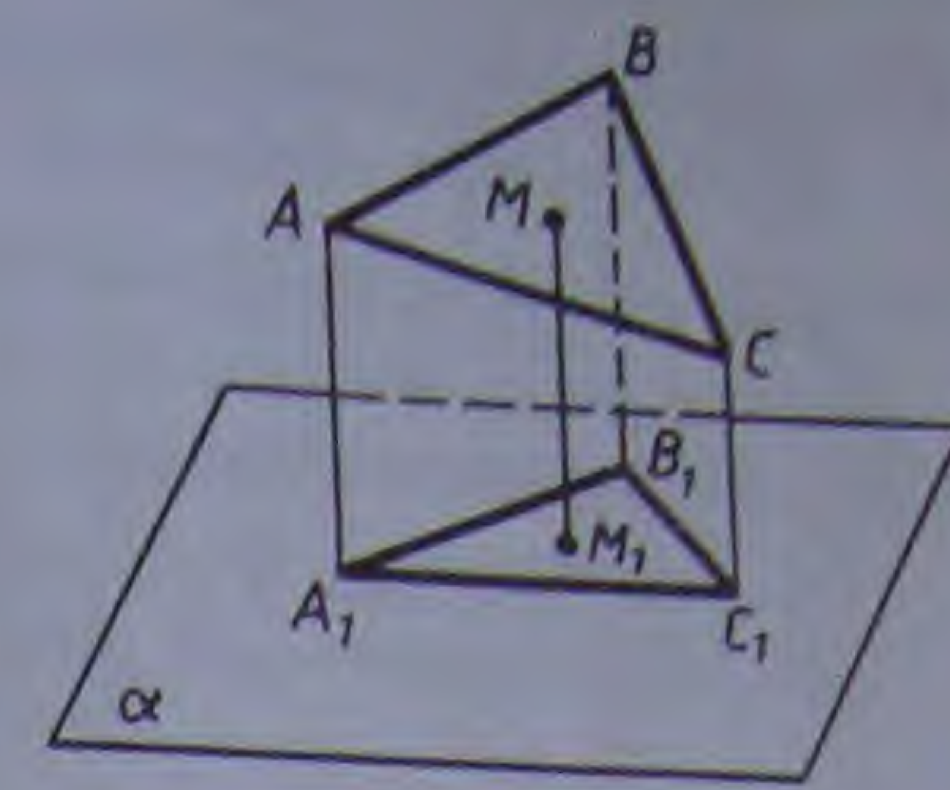
369. $OABC$ քառանիստի ABC նիստի միջնագծերը հատվում են M կետում: $\vec{OA}$ վեկտորը վերածեք ըստ $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OM}$ վեկտորների :

370. $ABCD$ կանոնական քառանիստի AM և DN բարձրությունները հատվում են K կետում : Ըստ $\vec{a}=\vec{DA}$, $\vec{b}=\vec{DB}$, $\vec{c}=\vec{DC}$ վեկտորների վերածեք հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{DN}$, **բ)** $\vec{DK}$, **գ)** $\vec{AM}$, **դ)** $\vec{MK}$:

371. $ABCD$ քառանիստում BCD նիստի միջնագծերը հատվում են O կետում: Ապացուցեք, որ AO հատվածի երկարությունը փոքր է A ընդհանուր գագաթով կողերի երկարությունների գումարի մեկ երրորդից:



Նկ. 111



Նկ. 112

372. Ապացուցեք, որ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի AC_1 անկյունագիծն անցնում է A_1BD և CB_1D_1 եռանկյունների միջնագծերի հատման կետերով և այդ կետերով բաժանվում է երեք հավասար հատվածների (նկ. 111):

Լուծում: A_1BD եռանկյան միջնագծերի հատման կետը նշանակենք M_1-ով: Կիրառելով (4) բանաձևը AA_1BD քառանիստի նկատմամբ՝ կստանանք $\vec{AM_1} = \frac{1}{3}\left(\vec{AA_1} + \vec{AB} + \vec{AD}\right)$: Ըստ զուգահեռանիստի կանոնի՝ $\vec{AA_1} + \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC_1}$, ուրեմն՝ $\vec{AM_1} = \frac{1}{3}\vec{AC_1}$: Դրանից հետևում է, որ M_1 կետը պատկանում է AC_1 անկյունագծին, և $AM_1 = \frac{1}{3}AC_1$:

Համանման ձևով կարելի է ապացուցել, որ CB_1D_1 եռանկյան միջնագծերի հատման M_2 կետը պատկանում է AC_1 անկյունագծին, և $C_1M_2 = \frac{1}{3}AC_1$:

$AM_1 = \frac{1}{3}AC_1$ և $C_1M_2 = \frac{1}{3}AC_1$ հավասարություններից հետևում է, որ M_1 և M_2 կետերը AC_1 անկյունագիծը բաժանում են երեք հավասար հատվածների, դրանք են՝ AM_1-ը, M_1M_2-ը և M_2C_1-ը:

373. A_1, B_1, C_1 և M_1 կետերն այն ուղղահայացների հիմքերն են, որոնք α հարթությանը տարված են ABC եռանկյան գագաթներից և նրա միջնագծերի հատման M կետից (նկ. 112): Ապացուցեք, որ $MM_1 = \frac{1}{3}(AA_1 + BB_1 + CC_1)$: Հավասարությունն արդյոք տեղի կունենա՞, եթե ABC եռանկյան ինչ-որ կողմեր հատեն α հարթությունը:

374. AB և CD հատվածներն ընկած չեն մի հարթության մեջ, M և N կետերն այդ հատվածների միջնակետերն են: Ապացուցեք, որ $MN < \frac{1}{2}(AC + BD)$:

375. $ABCD$ քառանիստում K և M կետերը AB և CD կողերի միջնակետերն են: Ապացուցեք, որ KC, KD, MA և MB հատվածների միջնակետերը ինչ-որ զուգահեռագծի գագաթներ են:

Հարցեր գլուխ IV-ի վերաբերյալ

1. Արդյոք ճշմարի՞տ է պնդումը. **ա)** ցանկացած երկու հակուղղված վեկտորները համագիծ են, **բ)** ցանկացած երկու համագիծ վեկտորները համուղղված են, **գ)** ցանկացած երկու հավասար վեկտորները համագիծ են, **դ)** ցանկացած երկու համուղղված վեկտորները հավասար են, **ե)** եթե $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, ապա $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$, **զ)** գոյություն ունեն այնպիսի $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորներ, որ $\vec{a}$-ն և $\vec{c}$-ն տարագիծ են, $\vec{b}$-ն և $\vec{c}$-ն տարագիծ են, իսկ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն համագիծ են:
2. A և C կետերը O կետի նկատմամբ համաչափ են, և $\vec{AD} = \vec{BC}$: B և D կետերն արդյոք համաչա՞փ են O կետի նկատմամբ:
3. A և C կետերը a ուղղի նկատմամբ համաչափ են, և $\vec{AD} = \vec{BC}$: Կարո՞ղ են, արդյոք, B և D կետերը լինել. **ա)** համաչափ a ուղղի նկատմամբ, **բ)** a ուղղի նկատմամբ անհամաչափ:
4. A և C կետերը, ինչպես նաև B և D կետերը համաչափ են α հարթության նկատմամբ: Կարո՞ղ են, արդյոք, $\vec{AB}$ և $\vec{CD}$ վեկտորները լինել. **ա)** հավասար, **բ)** անհավասար:
5. Հայտնի է, որ $\vec{a}$ և $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են: Արդյոք համագի՞ծ են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները:
6. Կարո՞ղ է, արդյոք, երկու վեկտորների գումարի երկարությունը փոքր լինել գումարվող վեկտորներից յուրաքանչյուրի երկարությունից:
7. Կարո՞ղ է, արդյոք, մի քանի ոչ զրոյական վեկտորների գումարի երկարությունը հավասար լինել այդ վեկտորների երկարությունների գումարին:
8. Կարո՞ղ է, արդյոք, երկու ոչ զրոյական վեկտորների տարբերության երկարությունը հավասար լինել այդ վեկտորների երկարությունների գումարին:

9. Կարո՞ղ է, արդյոք, երկու ոչ զրոյական վեկտորների տարբերության երկարությունը հավասար լինել այդ վեկտորների երկարությունների տարբերությանը:

10. Կարո՞ղ է, արդյոք, երկու ոչ զրոյական վեկտորների գումարի երկարությունը հավասար լինել այդ վեկտորների տարբերության երկարությանը:

11. Ի՞նչ թվով պետք է բազմապատկել $\vec{a}$ ոչ զրոյական վեկտորը, որպեսզի ստացվի հետևյալ պայմաններին բավարարող $\vec{b}$ վեկտոր.

ա) $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$ և $|\vec{b}|=|\vec{a}|$, **բ)** $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ և $|\vec{b}|=3|\vec{a}|$,

գ) $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ և $|\vec{b}|=k|\vec{a}|$, **դ)** $\vec{b}=\vec{0}$:

12. Հայտնի է, որ $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}$, ընդ որում՝ A, B և C կետերն ընկած չեն մի ուղղի վրա: k-ի ինչպիսի՞ արժեքի դեպքում AC և BD ուղիղները կլինեն. **ա)** զուգահեռ, **բ)** հատվող: Կարո՞ղ են, արդյոք, AC և BD ուղիղները լինել խաչվող:

13. Արդյոք համահա՞րթ են հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a}$, $3\vec{b}$, **բ)** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$:

14. Հայտնի է, որ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են: Արդյոք համահա՞րթ են հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{a}$, $2\vec{b}$, $3\vec{c}$, **բ)** $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{c}$, $2\vec{b}-3\vec{c}$:

15. A, B և C կետերը գտնվում են շրջանագծի վրա, իսկ O կետն ընկած չէ այդ շրջանագծի հարթության մեջ: Կարո՞ղ են, արդյոք, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ և $\overrightarrow{OC}$ վեկտորները լինել համահարթ:

Լրացուցիչ խնդիրներ

376. Տրված է $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ զուգահեռանիստը: Ապացուցեք, որ.

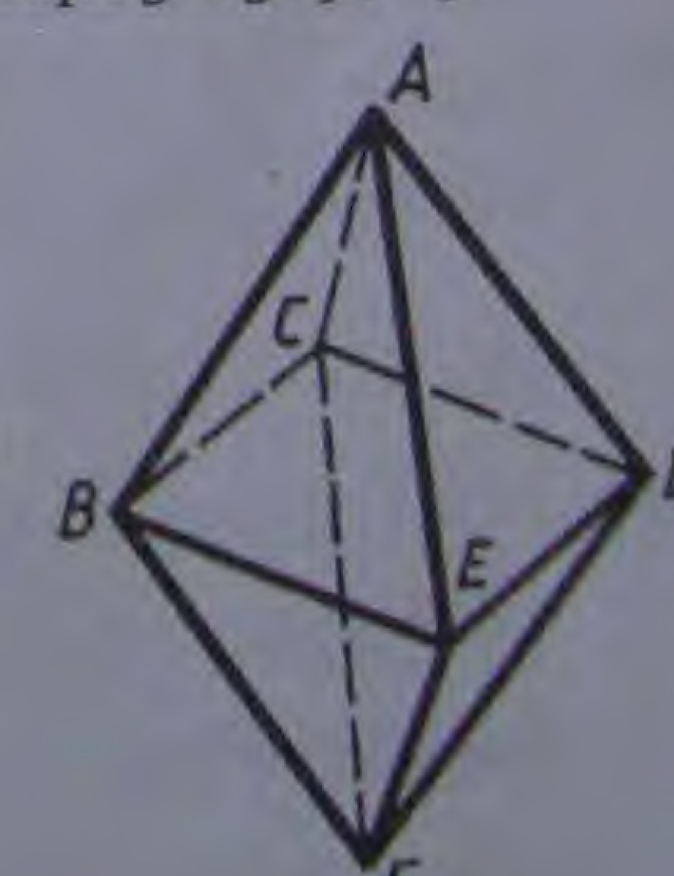
ա) $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{M_1Q_1}=\overrightarrow{N_1P_1}+\overrightarrow{NP}$,

բ) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP_1}=\overrightarrow{NQ_1}$, **գ)** $\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{QQ_1}=\overrightarrow{QP_1}$:

377. Նկար 113-ում պատկերված է կանոնական ութանիստ: Ապացուցեք, որ.

ա) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DB}$, **բ)** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EC}$,

գ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AF}$:



Նկ. 113

378. Ապացուցեք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունն արտահայտվում է $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ բանաձևով:

379. Տրված է $ABCD$ քառանիստը: Գտեք հետևյալ վեկտորների գումարը.

ա) $\vec{AB}+\vec{BD}+\vec{DC}$, **բ)** $\vec{AD}+\vec{CB}+\vec{DC}$, **գ)** $\vec{AB}+\vec{CD}+\vec{BC}+\vec{DA}$:

380. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: Գտեք հետևյալ վեկտորների գումարը.

ա) $\vec{AB}+\vec{B_1C_1}+\vec{DD_1}+\vec{CD}$, **բ)** $\vec{B_1C_1}+\vec{AB}+\vec{DD_1}+\vec{CB_1}+\vec{BC}+\vec{A_1A}$,

գ) $\vec{BA}+\vec{AC}+\vec{CB}+\vec{DC}+\vec{DA}$:

381. Տրված են ABC, $A_1B_1C_1$ եռանկյունները և O և P երկու կետերը տարածության մեջ: Հայտնի է, որ $\vec{OA}+\vec{OP}=\vec{OA_1}$, $\vec{OB}+\vec{OP}=\vec{OB_1}$, $\vec{OC}+\vec{OP}=\vec{OC_1}$: Ապացուցեք, որ $A_1B_1C_1$ եռանկյան կողմերը համապատասխանաբար հավասար են և զուգահեռ ABC եռանկյան կողմերին:

382. $\vec{a}=k\vec{b}$ հավասարման մեջ, որտեղ $\vec{b}\neq\vec{0}$, k-ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կլինեն. **ա)** համագիծ, **բ)** համուղղված, **գ)** հակուղղված, **դ)** հակադիր:

383. k և ℓ թվերը միմյանց հավասար չեն: Ապացուցեք, որ եթե $\vec{a}+k\vec{b}$ և $\vec{a}+\ell\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են, ապա. **ա)** $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են, **բ)** $\vec{a}+k_1\vec{b}$ և $\vec{a}+\ell_1\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են՝ ցանկացած k_1 և ℓ_1 անհավասար թվերի դեպքում:

384. A_1, B_1, և C_1 կետերը ABC եռանկյան BC, AC և AB կողմերի միջնակետերն են, իսկ O-ն տարածության կամայական կետ է: Ապացուցեք, որ $\vec{OA_1}+\vec{OB_1}+\vec{OC_1}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$:

385. $ABCD$ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները հատվում են M կետում: O կետը տարածության կամայական կետ է: Ապացուցեք, որ տեղի ունի $\vec{OM}=\frac{1}{4}\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}\right)$ հավասարությունը:

386. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում: Ապացուցեք, որ տարածության ցանկացած M կետի համար տեղի ունի $MO<\frac{1}{4}(MA+MB+MC+MD)$ անհավասարությունը:

387. M, N և P երեք կետերն ընկած են մի ուղղի վրա, իսկ O կետն այդ ուղղի վրա ընկած չէ: $\vec{OP}$ վեկտորն արտահայտեք $\vec{OM}$ և $\vec{ON}$ վեկտորներով, եթե **ա)** $\vec{NP}=2\vec{MN}$, **բ)** $\vec{MP}=-\frac{1}{2}\vec{PN}$, **գ)** $\vec{MP}=k\cdot\vec{MN}$, որտեղ k-ն տրված թիվ է:

388. Ապացուցեք, որ $\vec{p}$, $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համահարթ են, եթե. **ա)** այդ վեկտորներից մեկը զրոյական է, **բ)** այդ վեկտորներից երկուսը համագիծ են:

389. Երկու խաչվող ուղիղների վրա նշված են երեքական կետեր՝ A_1, A_2, A_3 և B_1, B_2, B_3, ընդ որում՝ $\vec{A_1A_2}=k\cdot\vec{A_1A_3}$, $\vec{B_1B_2}=k\cdot\vec{B_1B_3}$: Ապացուցեք, որ A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 ուղիղները զուգահեռ են ինչ-որ հարթության:

390. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստ, որում $AB=AD=a$, $AA_1=2a$: B_1 և D_1 գագաթներում տեղադրված են q լիցքեր, իսկ A գագաթում՝ $2q$ լիցք: Գտեք էլեկտրական դաշտի արդյունարար լարվածության բացարձակ մեծությունը. **ա)** A_1 կետում, **բ)** C կետում, **գ)** $A_1B_1C_1D_1$ նիստի կենտրոնում, **դ)** $ABCD$ նիստի կենտրոնում:

391. $ABCD$ քառանիստում K կետը BCD նիստի BB_1 միջնագծի միջնակետն է: $\vec{AK}$ վեկտորը վերածեք ըստ $\vec{a}=\vec{AB}$, $\vec{b}=\vec{AC}$, $\vec{c}=\vec{AD}$ վեկտորների:

392. $\vec{p}=\vec{AB}$, $\vec{q}=\vec{AD}$, $\vec{r}=\vec{AA_1}$ երեք տարագիծ վեկտորների վրա կառուցված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը: Այդ զուգահեռանիստի անկյունագծերով որոշվող վեկտորները վերածեք ըստ $\vec{p}$, $\vec{q}$ և $\vec{r}$ վեկտորների:

393. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստում K կետը CC_1 կողի միջնակետն է: Վերածեք. **ա)** $\vec{AK}$ վեկտորն ըստ $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AA_1}$ վեկտորների, **բ)** $\vec{DA_1}$ վեկտորն ըստ $\vec{AB_1}$, $\vec{BC_1}$, $\vec{CD_1}$ վեկտորների:

394. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստում DCC_1D_1 նիստի անկյունագծերը հատվում են M կետում: $\vec{AM}$ վեկտորը վերածեք ըստ $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ և $\vec{AA_1}$ վեկտորների:

395. Ապացուցեք, որ եթե ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների միջնագծերի հատման կետերը համընկնում են, ապա AA_1, BB_1 և CC_1 ուղիղները զուգահեռ են ինչ-որ հարթության:

396. $ABCD$ քառանիստում M կետը BC կողի միջնակետն է: $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ $\vec{DB}$ և $\vec{DM}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{b} = \vec{AB}$, $\vec{c} = \vec{AC}$ և $\vec{d} = \vec{AD}$ վեկտորներով:

397. $ABCD$ քառանիստում M և N կետերը, համապատասխանաբար, ADB և BDC նիստերի միջնագծերի հատման կետերն են: Ապացուցեք, որ $MN \parallel AC$, և գտեք այդ հատվածների երկարությունների հարաբերությունը:

398. ABC, $A_1B_1C_1$ և $A_2B_2C_2$ եռանկյունները դասավորված են այնպես, որ A, B, C կետերը, համապատասխանաբար, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 հատվածների միջնակետերն են: Ապացուցեք, որ ABC, $A_1B_1C_1$ և $A_2B_2C_2$ եռանկյունների միջնագծերի հատման կետերն ընկած են մի ուղղի վրա:

399. Ապացուցեք, որ եռանկյունը, որի գագաթները քառանիստի կողմնային նիստերի միջնագծերի հատման կետերն են, նման է այդ քառանիստի հիմքին:

Դժվարին խնդիրներ

400. Տրված են երկու խաչվող ուղիղներ, որոնց կազմած անկյունը 90^0 է: Գտեք տրված d երկարությամբ այն բոլոր հատվածների միջնակետերի բազմությունը, որոնց ծայրակետերն ընկած են այդ ուղիղների վրա:

401. Տրված է քառանիստ, որի բոլոր կողերը հավասար են: Ապացուցեք, որ այդ քառանիստի երկու հանդիպակաց կողերը զուգահեռ հարթություններով հատելիս առաջացած պատկերների պարագծերը հավասար են:

402. Ապացուցեք, որ քառանիստի երկու հանդիպակաց կողերի քառակուսիների գումարը կրկնակի մեծ է այն հատվածների քառակուսիների գումարից, որոնք միացնում են, համապատասխանաբար, մնացած հանդիպակաց կողերի միջնակետերը:

403. Հայտնի է, որ ցանկացած հավասարակողմ եռանկյունից կարելի է վերակազմել քառանիստ՝ ծալելով այն ըստ երեք միջին գծերի և կպցնելով նրա կողմերի համապատասխան մասերը (տես նկ. 88): Ի՞նչ պայմանների պետք է բավարարեն կամայական եռանկյան անկյունները, որպեսզի նշված եղանակով հնարավոր լինի նրանից վերակազմել քառանիստ:

404. Գտեք այն բոլոր ուղղահայացների հիմքերի բազմությունը, որոնք BC ուղղի վրա չընկած A կետից տարված են այդ ուղղով անցնող հարթություններին:

405. Ապացուցեք, որ եթե քառանիստի բարձրություններից մեկն անցնում է հանդիպակաց նիստի բարձրությունների հատման կետով, ապա այդ քառանիստի մնացած բարձրությունները ևս անցնում են հանդիպակաց նիստերի բարձրությունների հատման կետերով:

406. $OABC$ քառանիստի O գագաթին հարակից բոլոր հարթ անկյունները 90^0 են: Ապացուցեք, որ AOB եռանկյան մակերեսը հավասար է ABC և O_1AB եռանկյունների մակերեսների երկրաչափական միջինին, որտեղ O_1-ը O կետի պրոյեկցիան է ABC հարթության վրա:

407. $OABC$ քառանիստի O գագաթին հարակից բոլոր հարթ անկյունները ուղիղ անկյուն են: Ապացուցեք, որ ABC եռանկյան մակերեսի քառակուսին հավասար է մնացած նիստերի մակերեսների քառակուսիների գումարին (Պյութագորասի տարածաչափական թեորեմը):

408. Քանի՞ հարթություն գոյություն ունի, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասարահեռ է մի հարթության մեջ չընկնող տրված չորս կետերից:

409. Ապացուցեք, որ երկնիստ անկյան երկու նիստերը հատող ուղիղը դրանց հետ կազմում է հավասար անկյուններ այն և միայն այն դեպքում, երբ հատման կետերը հավասարահեռ են կողից:

410. Ապացուցեք, որ խորանարդի հատույթը կարող է լինել կանոնավոր եռանկյուն, քառակուսի, կանոնավոր վեցանկյուն, սակայն չի կարող լինել կանոնավոր հնգանկյուն և այնպիսի կանոնավոր բազմանկյուն, որի կողմերի թիվը վեցից մեծ է:

411. Ապացուցեք, որ խորանարդի գագաթներից մինչև նրա կենտրոնով անցնող ուղիղը եղած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը կախված չէ այդ ուղղի դիրքից:

412. Խորանարդը տրոհեք վեց հավասար քառանիստերի:

413. Սենյակն ունի խորանարդի ձև: Սարդը, որ նստած է կողի միջնակետին, ուզում է ամենակարճ ճանապարհին անցնելով բռնել ճանճին, որ նստած է խորանարդի՝ սարդից ամենահեռու գագաթներից մեկում: Ի՞նչ ճանապարհով շարժվի սարդը:

414. Ապացուցեք, որ խորանարդում կարելի է բացել միջանցիկ այնպիսի անցք, որի միջով կարելի է անցկացնել այդ նույն և նույնիսկ ավելի մեծ չափսերով խորանարդ:

415. Կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի կողմնային նիստի մակերեսը S է: Գտեք բուրգի այն հատույթի մակերեսը, որն առաջանում է բուրգի բարձրության միջնակետով անցնող և կողմնային նիստի հարթությանը զուգահեռ հարթությամբ:

416. Ի՞նչ առավելագույն երկարություն կարող է ունենալ այն կանոնական քառանիստի կողը, որը տեղավորվում է 1սմ կողմ ունեցող խորանարդաձև տուփի մեջ:

417. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: Ապացուցեք, որ AB_1CD_1 և C_1BA_1D քառանիստերի հատումը կանոնական ութանիստ է:

418. Ապացուցեք, որ վերջավոր թվով զույգ առ զույգ տարբեր խորանարդներից հնարավոր չէ կազմել ուղղանկյունանիստ:

419. 1սմ կող ունեցող խորանարդի ներսում տեղավորված է բեկյալ, ընդ որում՝ խորանարդի ցանկացած նիստին զուգահեռ ցանկացած հարթությունը հատում է այն ոչ ավել, քան մեկ կետում: Ապացուցեք, որ բեկյալի երկարությունը փոքր է 3սմ-ից: Ապացուցեք, որ կարելի է կառուցել նշված հատկությամբ օժտված այնպիսի՝ բեկյալ, որի երկարությունը 3սմ-ից տարբերվի որքան ուզեք քիչ:

420. Ապացուցեք, որ ցանկացած ուռուցիկ բազմանիստի նիստերի և գագաթների թվերի գումարը կողերի թվից մեծ է 2-ով (Էյլերի թեորեմը):

421. Ապացուցեք, որ կանոնական տասներկանիստի նիստերի կենտրոնները կանոնական քսանանիստի գագաթներ են:

422. Ապացուցեք, որ կանոնական քսանանիստի նիստերի կենտրոնները կանոնական տասներկանիստի գագաթներ են:

423. ABC կանոնավոր եռանկյան կողմը a է: AS հատվածը, որի երկարությունը a է, ուղղահայաց է ABC հարթությանը: Գտեք AB և SC ուղիղների հեռավորությունը և նրանց կազմած անկյունը:

424. ABC կանոնավոր եռանկյան կողմը a է: ABC հարթությանը ուղղահայաց BD և CE համուղղված ճառագայթների վրա վերցված են D և E կետերն այնպես, որ $BD=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $CE=\sqrt{2}$: Ապացուցեք, որ ADE եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է, և գտեք ABC և ADE հարթությունների կազմած անկյունը:

425. Օգտագործելով վեկտորները՝ ապացուցեք, որ զուգահեռանիստի չորս անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է նրա տասներկու կողերի քառակուսիների գումարին:

426. $OABC$ քառանիստի ABC հիմքը թափանցիկ է, իսկ մյուս բոլոր նիստերը հայելային են: O գագաթին հարակից բոլոր հարք անկյունները ուղիղ անկյուն են: Ապացուցեք, որ լույսի ճառագայթը, որ քառանիստ է մտնում ABC հիմքի միջով՝ նրա նկատմամբ կամայական անկյան տակ, անդրադառնալով նիստերից, դուրս է գալիս մտնող ճառագայթի հանդեպ հակադիր ուղղությամբ: (Այս հատկության հիման վրա է կառուցված անկյունային անդրադարձիչը, որը, մասնավորապես, ուղարկվել է Լուսին՝ լազերի օգնությամբ նրա հեռավորությունը չափելու համար:)

427. A կետից ելնում են AB, AC, AD և AE չորս ճառագայթներն այնպես, որ $\angle BAC=60^0$, $\angle BAD=\angle DAC=45^0$, իսկ AE ճառագայթն ուղղահայաց է ABD հարթությանը: Գտեք CAE անկյունը:

428. Ապացուցեք, որ քառանիստի բարձրությունները մի կետում են հատվում այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա հանդիպակաց կողերը փոխուղղահայաց են:

429. Քառանիստի երեք կողմնային կողերը միմյանց հավասար են: Ապացուցեք, որ այդ կողերի հետ հավասար անկյուններ կազմող և հիմքի հարթությունը հատող ուղիղն ուղղահայաց է այդ հարթությանը:

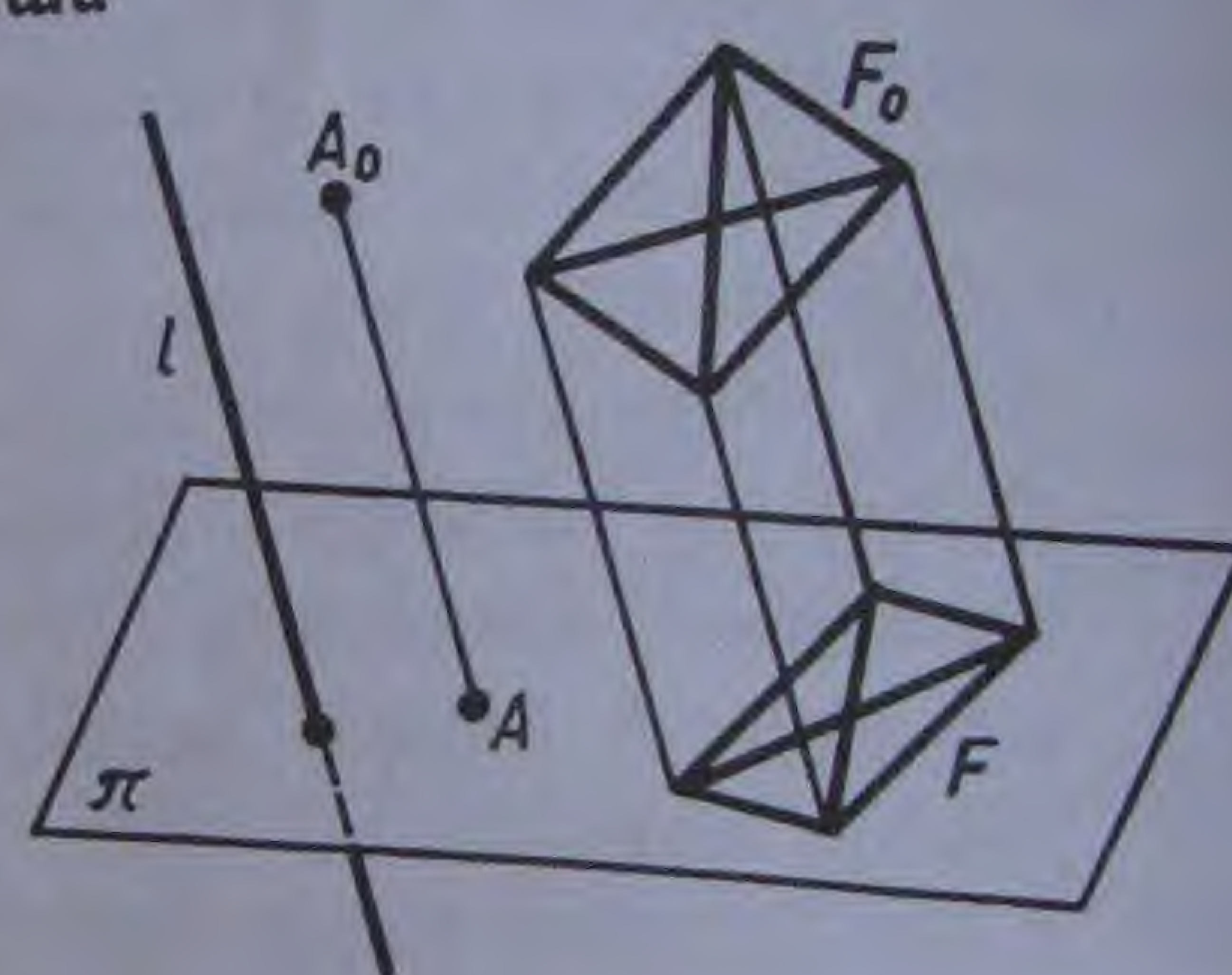
430. $OABC$ քառանիստի O գագաթին հարակից բոլոր հարք անկյունները ուղիղ անկյուն են: Ապացուցեք, որ O գագաթի պրոյեկցիան ABC հարթության վրա այն կետն է, որում հատվում են ABC եռանկյան բարձրությունները:

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ԳԾԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄԸ

Տարածաչափություն ուսումնասիրելիս ավելի է կարևորվում երկրաչափական պատկերների գծապատկերման հարցը: Այստեղ մենք կծանոթանանք գծապատկերներ կառուցելու մի քանի կանոնների: Դրա համար կներմուծենք նախ՝ պատկերի զուգահեռ պրոյեկցիայի, իսկ ապա՝ դրա միջոցով նրա գծապատկերի հասկացությունը և այնուհետև կդիտարկենք հարթ և տարածական պատկերների գծապատկերումների օրինակներ:

1 Պատկերի զուգահեռ պրոյեկցիան

Դիցուք՝ π-ն որևէ հարթություն է, իսկ ℓ-ը՝ այդ հարթությունը հատող ուղիղ: Նշենք տարածության կամայական A_0 կետ: Եթե A_0 կետն ընկած չէ ℓ ուղղի վրա, ապա A_0 կետով տանենք ուղիղ՝ զուգահեռ ℓ ուղղին, և A տառով նշանակենք այդ ուղղի ու π հարթության հատման կետը (նկ. 114): Եթե A_0-ն ℓ ուղղի կետ է, ապա A-ով կնշանակենք հենց ℓ ուղղի և π հարթության հատման կետը: **A կետը կոչվում է A_0 կետի պրոյեկցիա π հարթության վրա՝ ըստ ℓ ուղղին զուգահեռ պրոյեկտման:** Սովորաբար ենթադրվում է, որ π հարթությունն ու ℓ ուղիղը տրված են, այդ առումով էլ A կետը համառոտ անվանում են **A_0 կետի զուգահեռ պրոյեկցիա:**



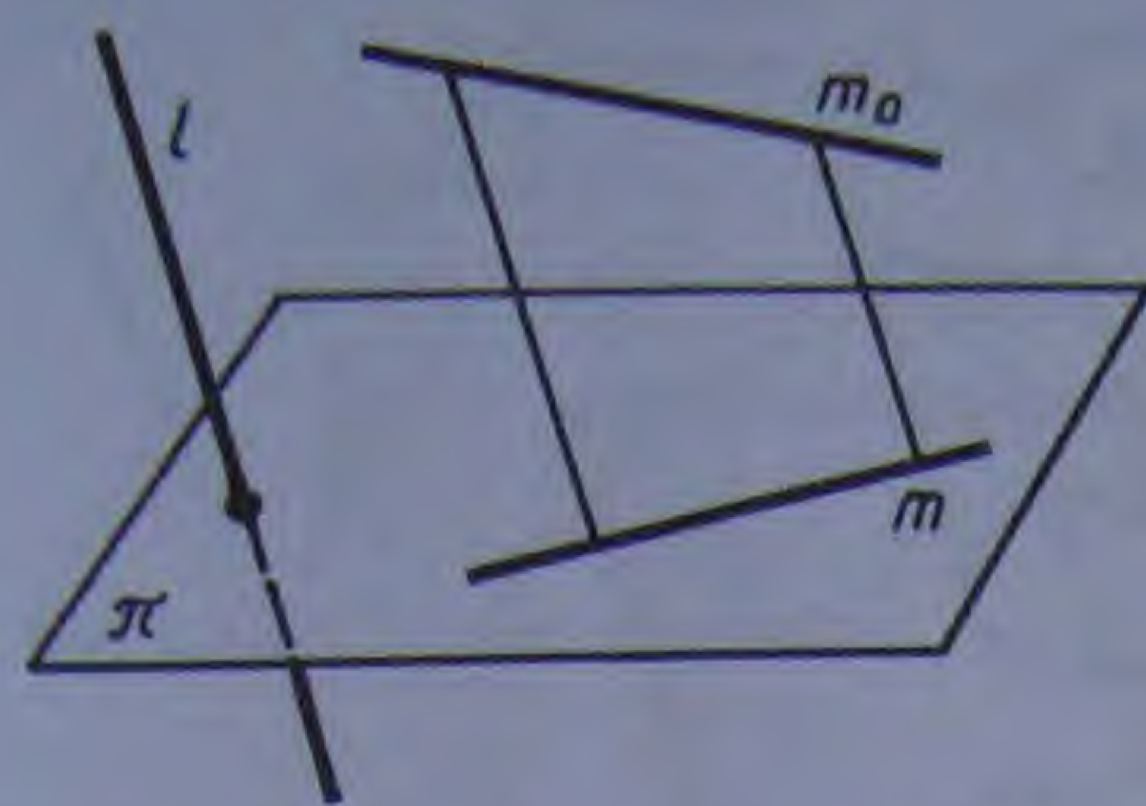
Նկ. 114

Դիցուք՝ F_0-ն հարթ կամ տարածական պատկեր է: F_0 պատկերի բոլոր կետերի զուգահեռ պրոյեկցիաները π հարթության վրա կազմում են մի որևէ F պատկեր (տե՛ս նկ. 114): F պատկերը կոչվում է ***F_0* պատկերի զուգահեռ պրոյեկցիա:** Նաև ասում են, որ F պատկերն ստացվում է F_0 պատկերից՝ **զուգահեռ պրոյեկտմամբ:**

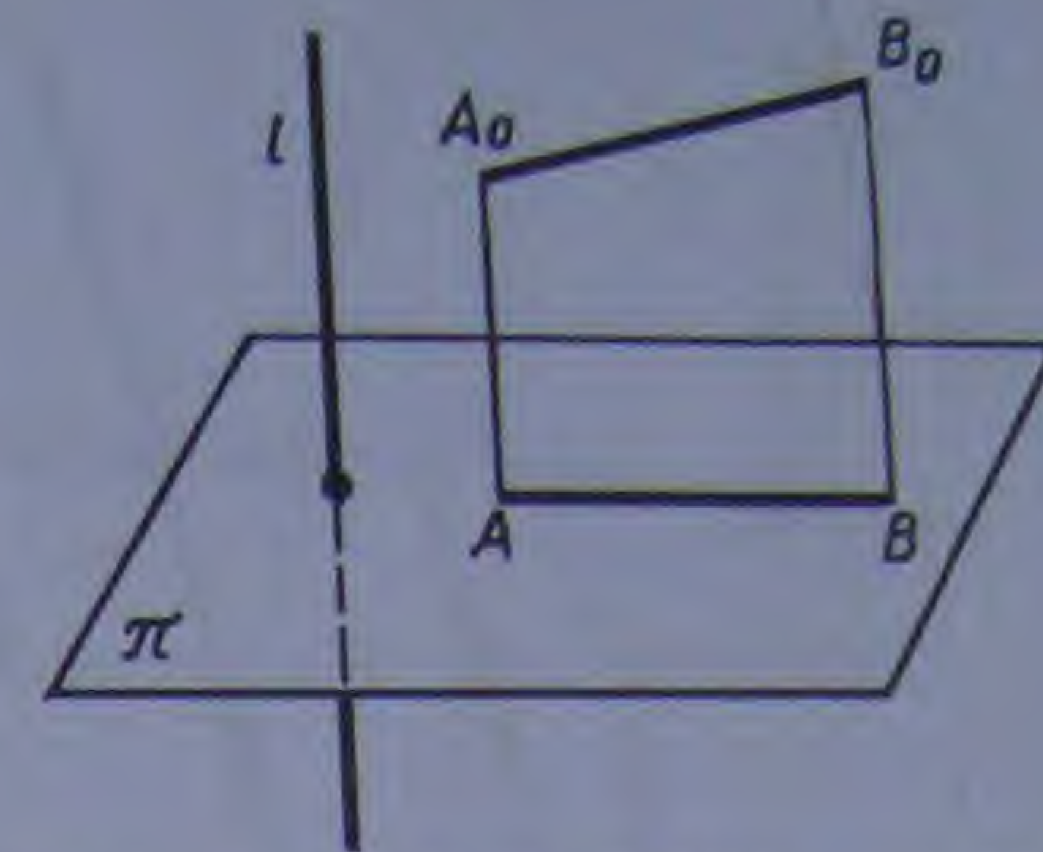
Ձևակերպենք զուգահեռ պրոյեկտման հիմնական հատկությունները այն դեպքի համար, երբ պրոյեկտվող հատվածները և ուղիղները զուգահեռ չեն տրված ℓ ուղղին:

1°. Ուղղի պրոյեկցիան ուղիղ է (նկ. 115):

2°. Հատվածի պրոյեկցիան հատված է (նկ. 116):



m_0 ուղղի պրոյեկցիան m ուղիղն է
Նկ. 115



A_0B_0 հատվածի պրոյեկցիան AB հատվածն է
Նկ. 116

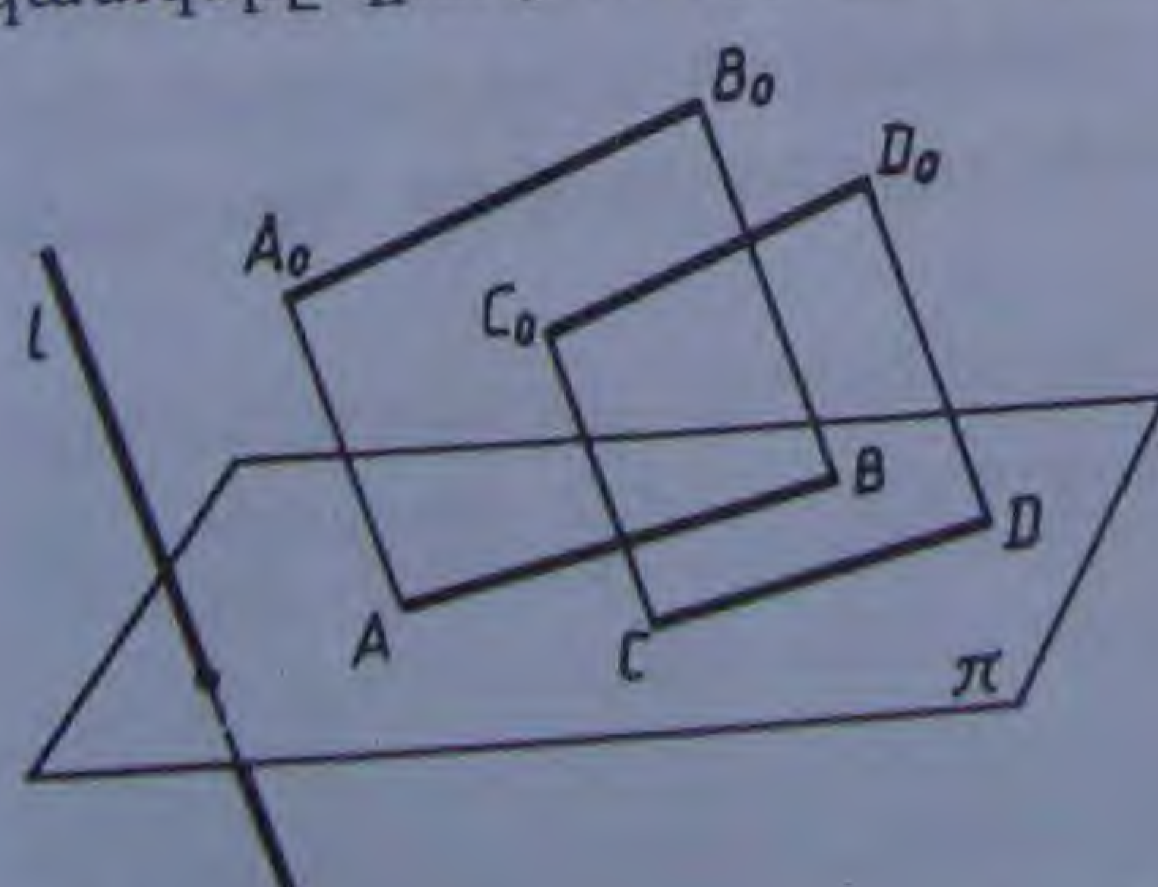
3^0. Զուգահեռ հատվածների պրոյեկցիաները զուգահեռ հատվածներ են (նկ. 117), **կամ էլ՝ մի ուղղի պատկանող հատվածներ:**

4^0. Զուգահեռ հատվածների, ինչպես նաև մի ուղղի վրա ընկած հատվածների պրոյեկցիաները համեմատական են իրենց՝ հատվածներին (նկ. 118):

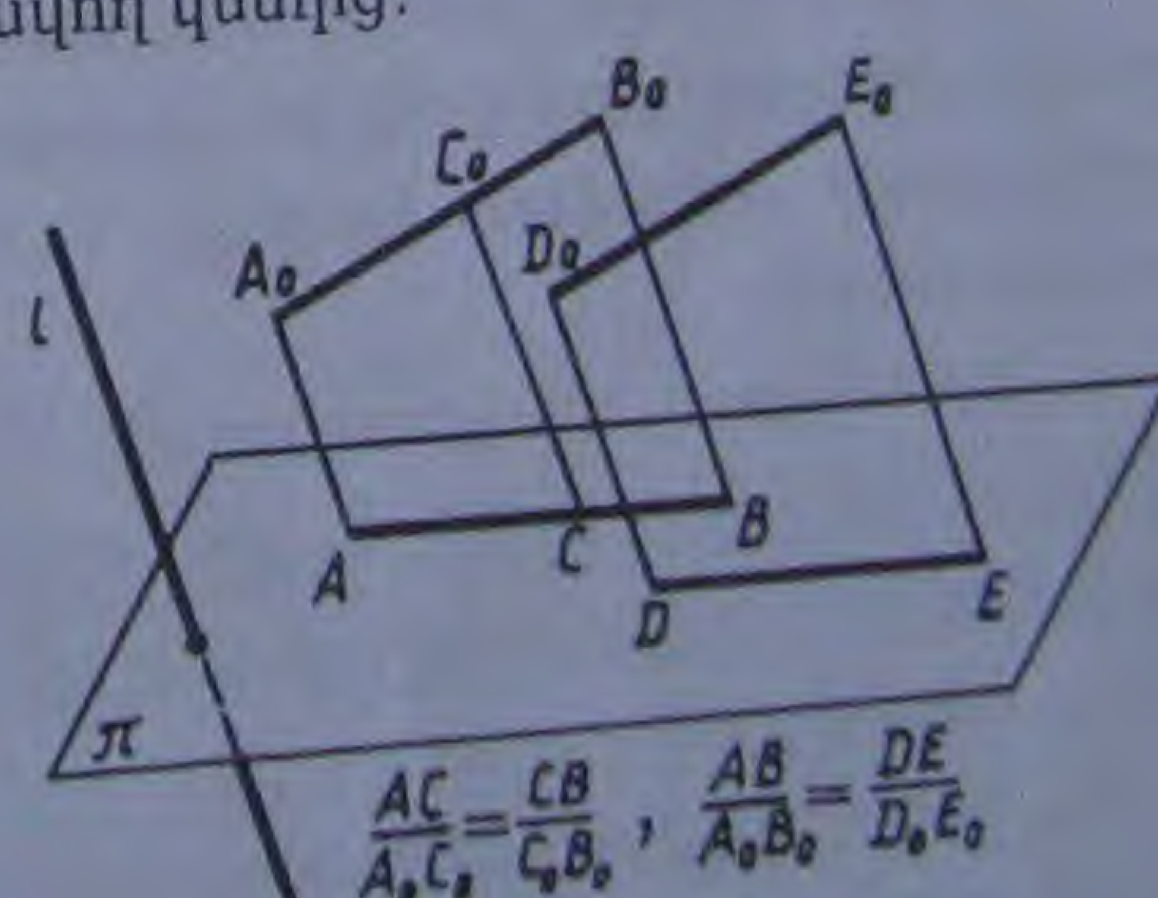
Հատկություն 4^0-ից հետևում է, որ հատվածի միջնակետի պրոյեկցիան այդ հատվածի պրոյեկցիայի միջնակետն է:

2 Պատկերի գծապատկերը

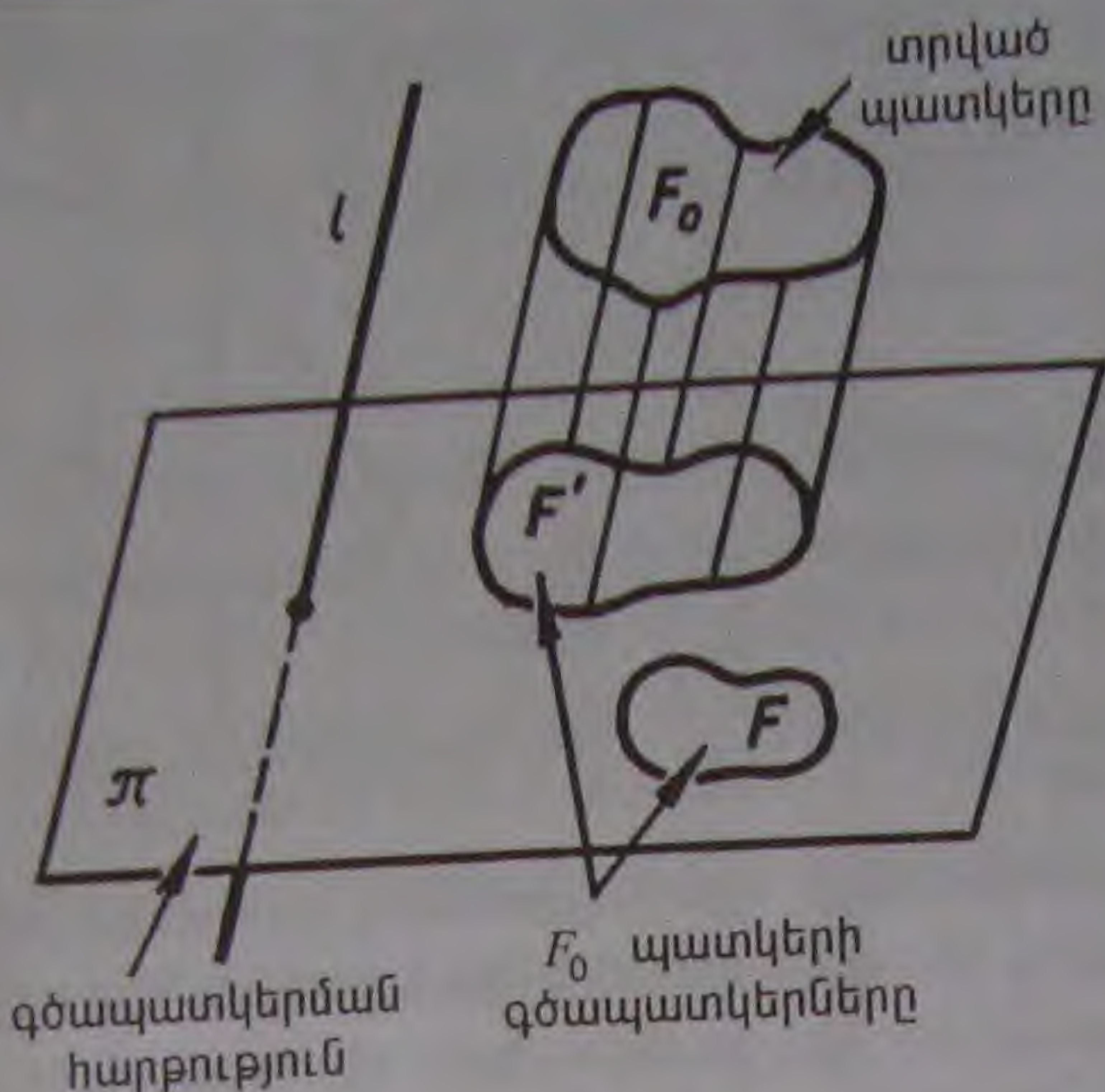
Ընտրենք որևէ π հարթություն և այն անվանենք **գծապատկերման հարթություն**: Այնուհետև վերցնենք π հարթությունը հատող ℓ ուղիղ և տրված F_0 պատկերը ℓ ուղղին զուգահեռ պրոյեկտենք π հարթության վրա: Ստացված F' հարթ պատկերը, ինչպես նաև դրան նման ամեն մի F պատկեր π հարթության վրա, կանվանենք **F_0 պատկերի գծապատկեր** (նկ. 119): Պատկերի՝ այդ ձևով կառուցված գծապատկերը համապատասխանում է տեսողական այն ընկալմանը, որն առաջանում է, երբ այդ պատկերը դիտվում է իրենից հեռու գտնվող կետից:



A_0B_0 և C_0D_0 զուգահեռ հատվածների պրոյեկցիաները AB և CD զուգահեռ հատվածներն են
Նկ. 117



Նկ. 118



Նկ. 119

Գծապատկերման համար ընտրելով տարբեր հարթություններ և պրոյեկտման տարբեր ուղղություններ (այսինքն՝ տարբեր ուղիղներ), կստանանք տրված նույն պատկերի տարբեր գծապատկերներ: Սովորաբար ընտրվում է պատկերի այնպիսի գծապատկեր, որն առավել դիտողական է և, միաժամանակ, հարմար է նրա վրա լրացուցիչ կառուցումներ կատարելու համար: Այդ գծապատկերն էլ հենց վերարտադրվում է գծագրի վրա:

3 Հարթ պատկերների գծապատկերումը

Պատկերների գծապատկերման հիմքում ընկած են զուգահեռ պրոյեկտման հատկությունները, որոնք ձևակերպել ենք կետ 1-ում: Դիտարկենք հարթ պատկերների գծապատկերման մի քանի օրինակներ:

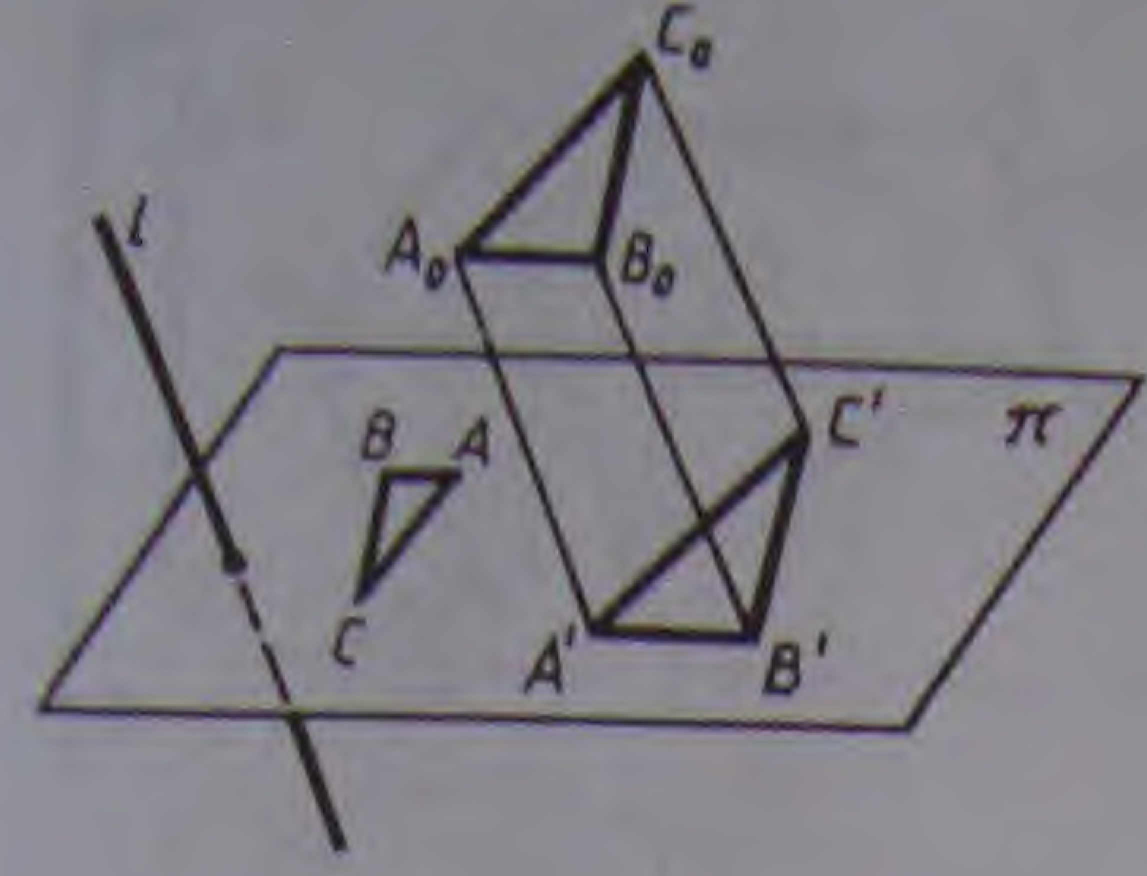
Հատված

Ըստ հատկություն 2^0-ի՝ հատվածի պրոյեկցիան հատված է, ուրեմն՝ հատվածի գծապատկերը ևս հատված է: Հասկանալի է, որ **գծագրի վրա ցանկացած հատված կարելի է համարել որպես տրված հատվածի գծապատկեր:**

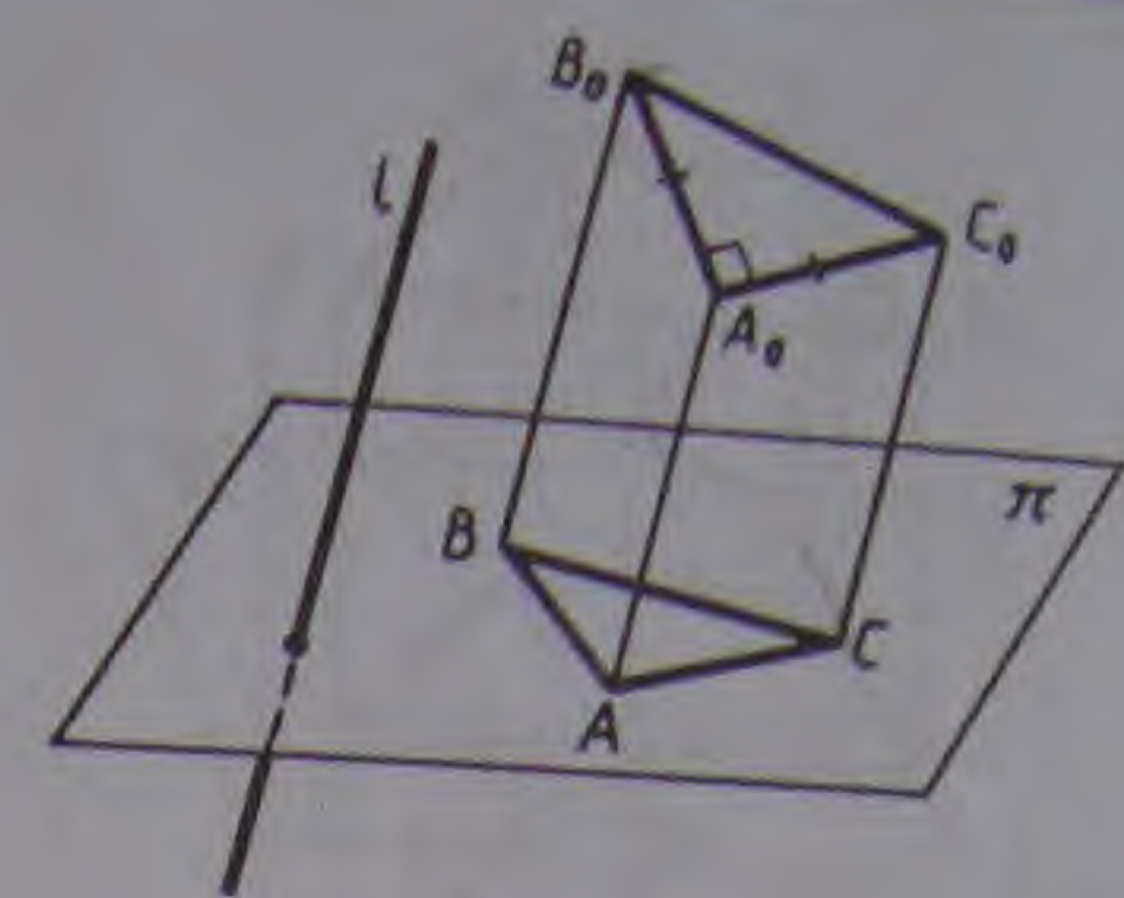
Եռանկյան, զուգահեռագծի և այլ պատկերների գծապատկերները դիտարկելիս կհամարենք, որ դրանց հարթությունները զուգահեռ չեն պրոյեկտման ուղղությանը (ℓ ուղղին):

Եռանկյուն

Դիցուք $A_0B_0C_0$-ն տարածության մեջ գտնվող մի եռանկյուն է, իսկ A', B', C' կետերը A_0, B_0, C_0 կետերի պրոյեկցիաներն են π հարթության վրա (նկ. 120,ա): Քանի որ հատվածի պրոյեկցիան հատված է, ապա $A'B'C'$ եռանկյունը (ինչպես նաև կամայական ABC եռանկյուն, որ նման է $A'B'C'$



ա)



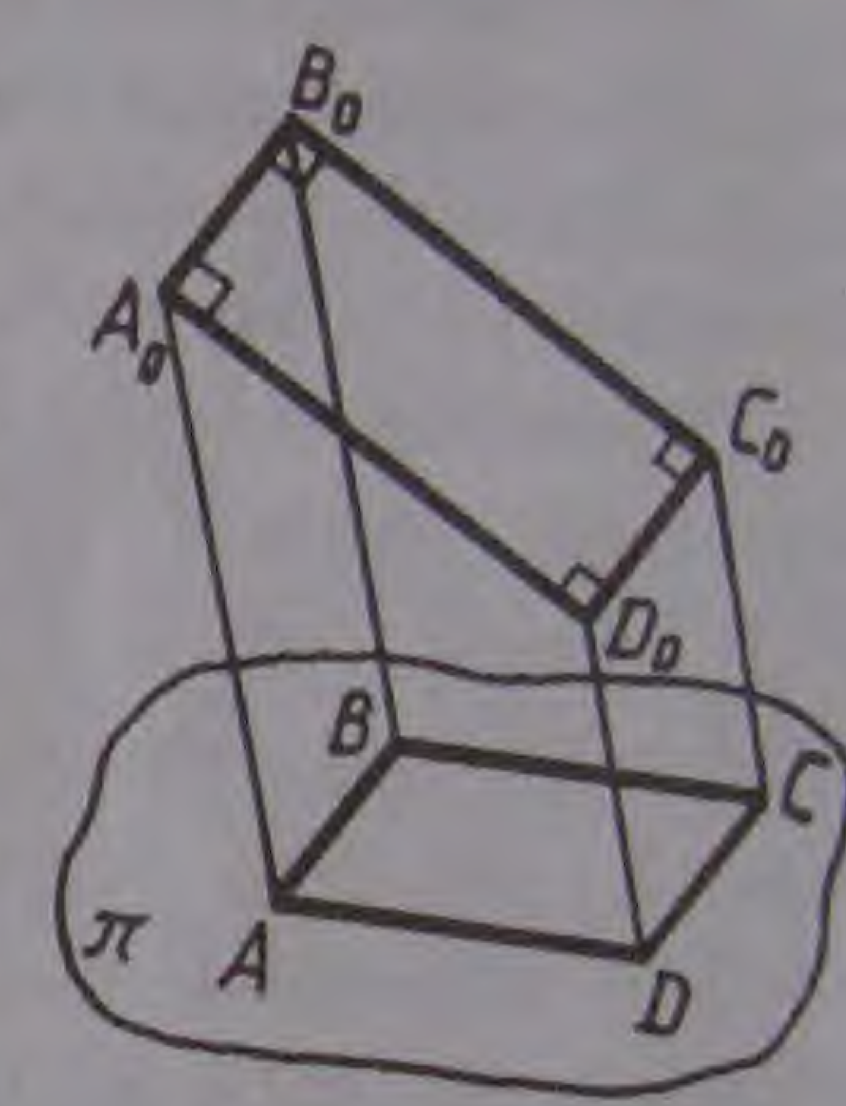
բ)

Նկ. 120

եռանկյանը) $A_0B_0C_0$ եռանկյան գծապատկերն է: **Որպես տրված եռանկյան գծապատկեր գծագրի վրա կարելի է վերցնել կամայական եռանկյունը:** Օրինակ՝ 120,բ նկարում $A_0B_0C_0$ հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան համար իբրև գծապատկեր ծառայում է ABC տարակողմ եռանկյունը:

Զուգահեռագիծ

Քանի որ հավասար և զուգահեռ հատվածների պրոյեկցիաները հավասար և զուգահեռ հատվածներ են (հատկություն 3^0 և 4^0), ուրեմն՝ զուգահեռագծի գծապատկերը նույնպես զուգահեռագիծ է: Ինչպես և եռանկյան դեպքում՝ գծագրի վրա կամայական զուգահեռագիծ կարելի է դիտել իբրև տրված զուգահեռագծի, մասնավորապես՝ տրված ուղղանկյան, շեղանկյան կամ քառակուսու գծապատկեր (նկ. 121):



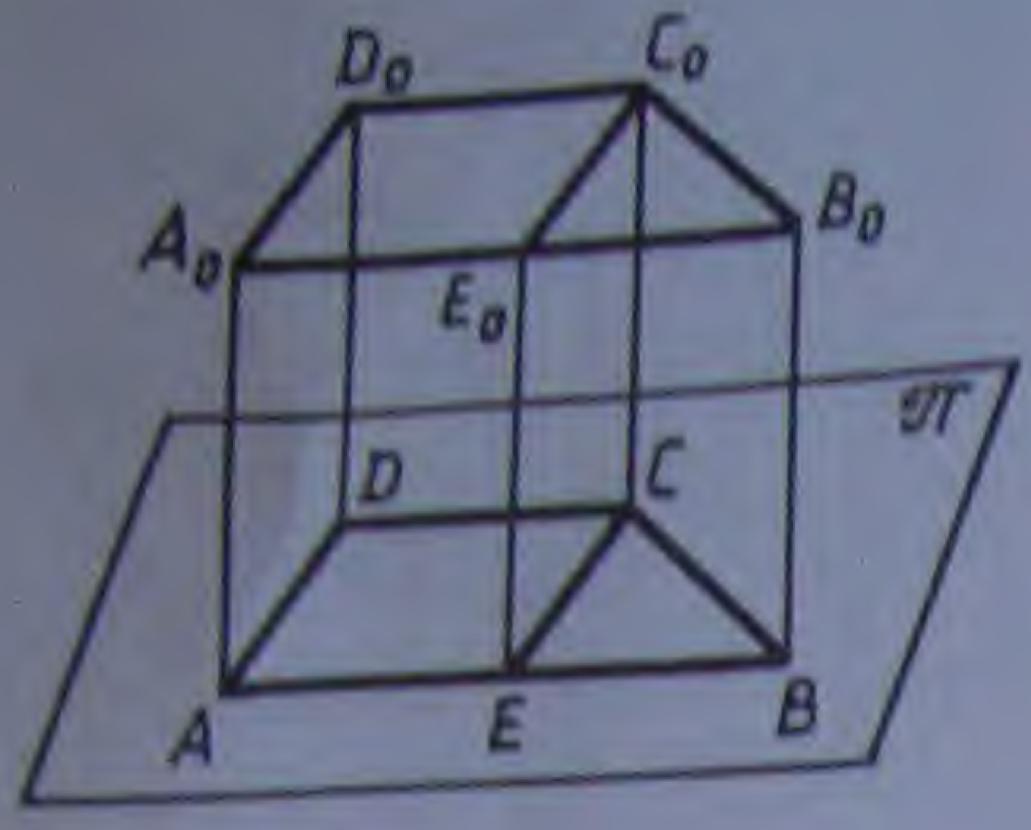
Նկ. 121

Սեղան

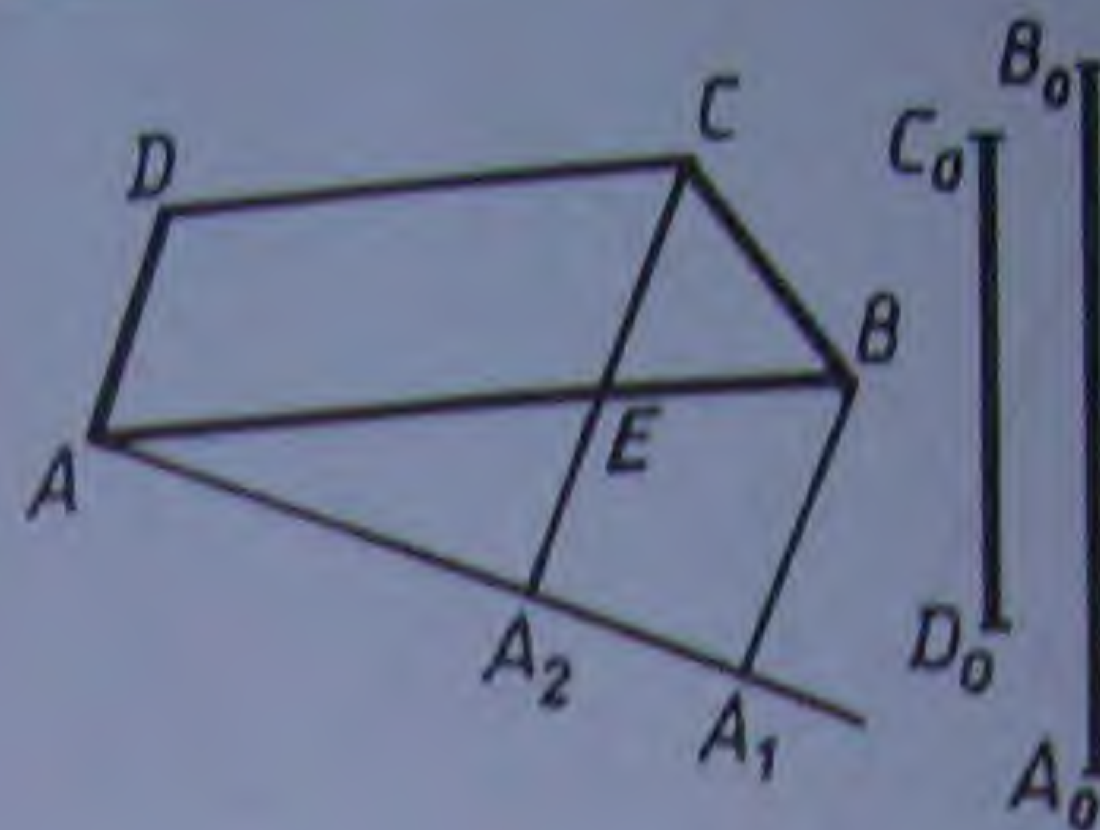
Նկատենք, որ A_0B_0 և C_0D_0 հիմքերով $A_0B_0C_0D_0$ սեղանի գծապատկերը այնպիսի $ABCD$ սեղան է, որի համար, ըստ կետ 1-ի հատկություն 4^0-ի՝

$$\frac{AB}{A_0B_0} = \frac{CD}{C_0D_0}, \qquad (1)$$

այսինքն՝ սեղանի գծապատկերի հիմքերը համեմատական են սեղանի՝ իր հիմքերին: Դրա համար էլ ամեն մի սեղան չէ, որ կարելի է դիտել իբրև տրված սեղանի գծապատկեր: Նկարագրենք, թե ինչպես կառուցել տրված $A_0B_0C_0D_0$ սեղանի գծապատկերը: Այդ նպատակով դիտարկենք մի օժանդակ հատված՝ C_0E_0-ն, որը զուգահեռ է A_0D_0 հատվածին, և որը սեղանը տրոհում է $A_0D_0C_0E_0$ զուգահեռագծի ու $B_0C_0E_0$ եռանկյան (նկ. 122,ա): Իբրև $A_0D_0C_0E_0$ զուգահեռագծի գծապատկեր վերցնենք մի կամայական՝ $ADCE$



ա)



բ)

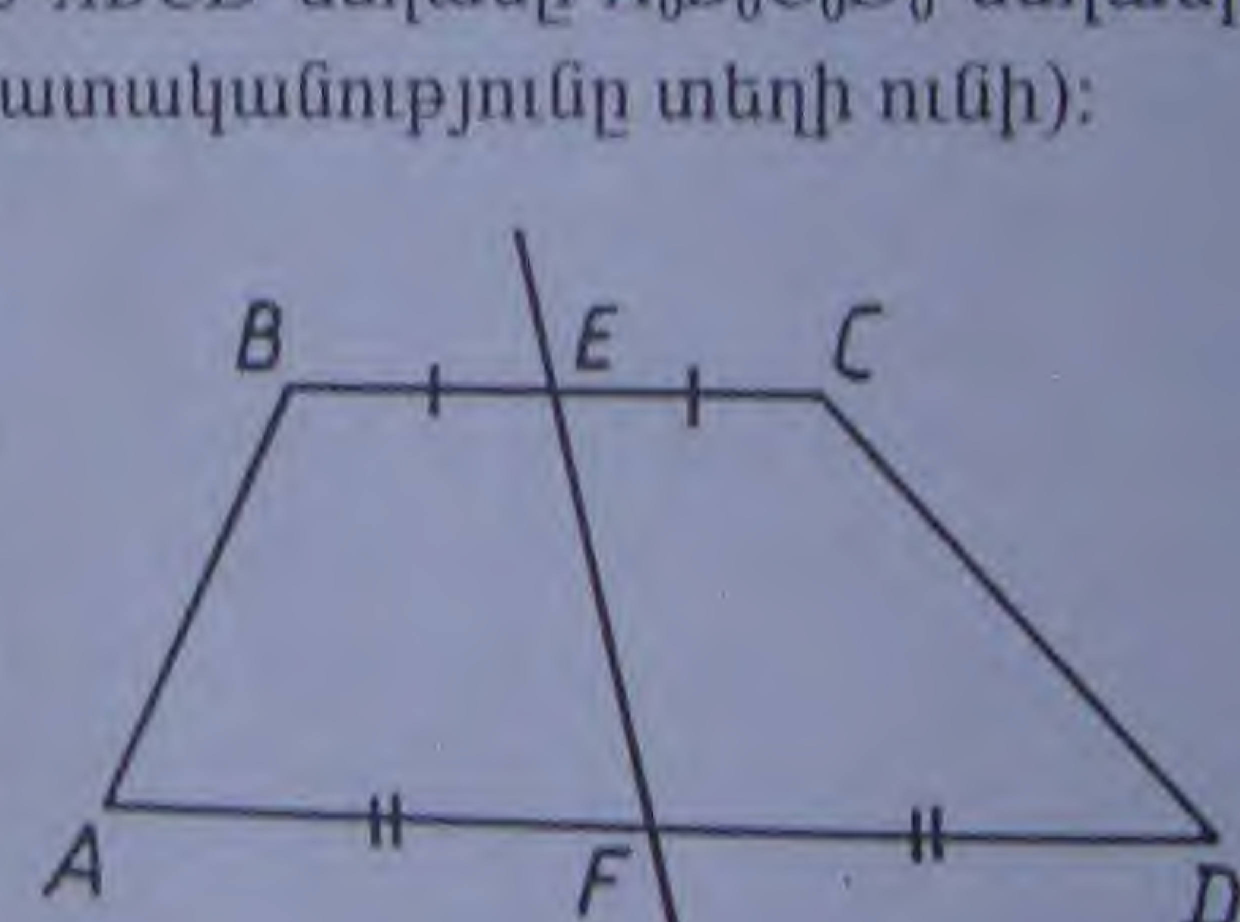
Նկ. 122

զուգահեռագիծ (նկ. 122,բ): Քանի որ $AE=DC$, ապա (1) համեմատականությունը կարելի է գրել այսպես՝

$$\frac{AB}{A_0B_0}=\frac{AE}{C_0D_0}: \qquad (2)$$

Օգտվելով (2) համեմատականությունից՝ այժմ դժվար չէ կառուցել B_0 կետի գծապատկերը՝ B կետը: Այդ կառուցումն արված է 122,բ նկարում, որտեղ $AA_2=C_0D_0$, $AA_1=A_0B_0$: Կառուցված $ABCD$ սեղանը $A_0B_0C_0D_0$ սեղանի գծապատկերն է (նրա համար (1) համեմատականությունը տեղի ունի):

Նկատենք, որ $A_0B_0C_0D_0$ հավասարասրուն սեղանի գծապատկերը՝ $ABCD$ սեղանը, կարող է և հավասարասրուն չլինել: Այս դեպքում հավասարասրուն սեղանի համաչափության առանցքի գծապատկերը EF ուղիղն է, որն անցնում է AD և BC հիմքերի միջնակետերով և, հետևաբար, EF հատվածը հավասարասրուն սեղանի բարձրության գծապատկերն է (նկ. 123):

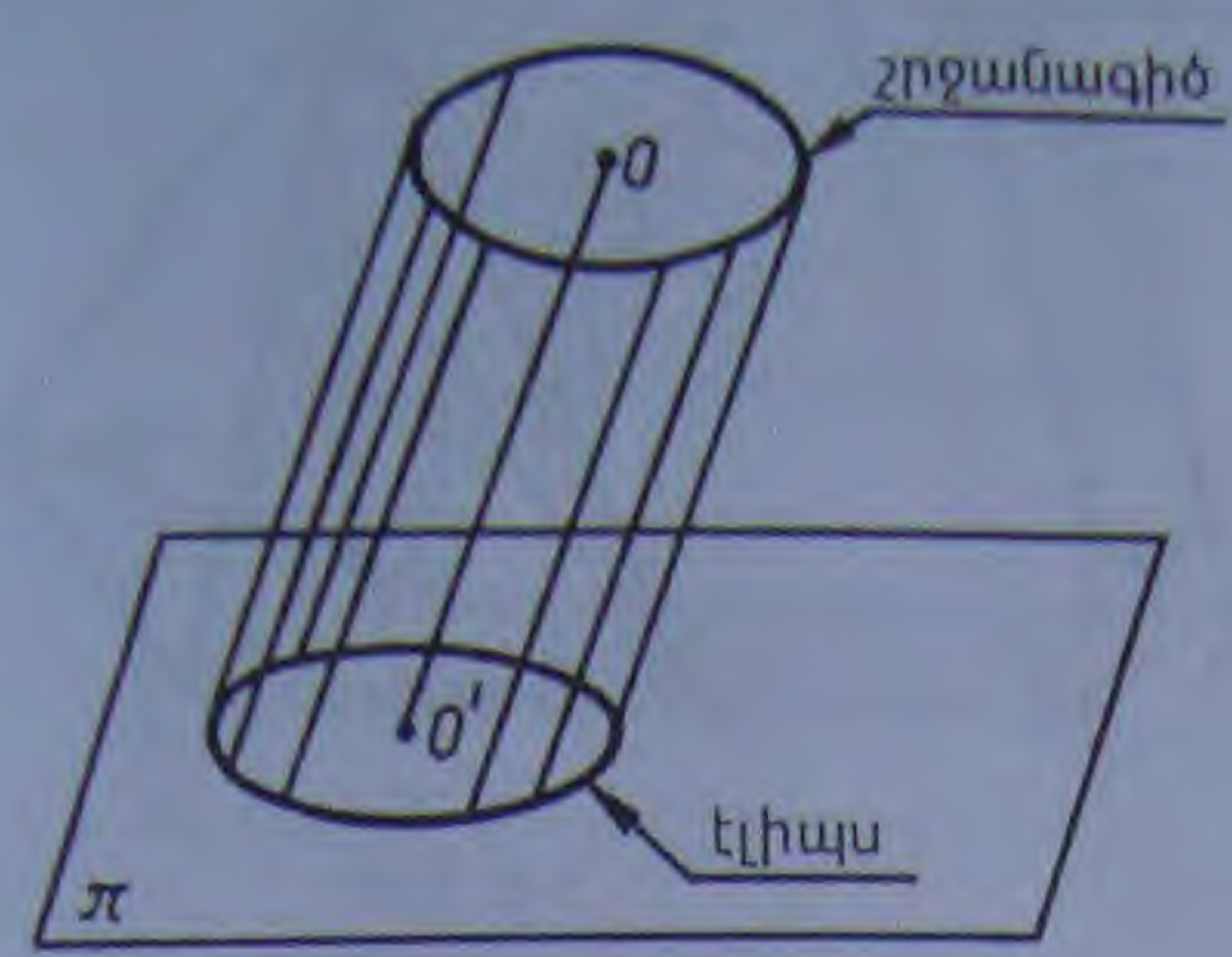


Նկ. 123

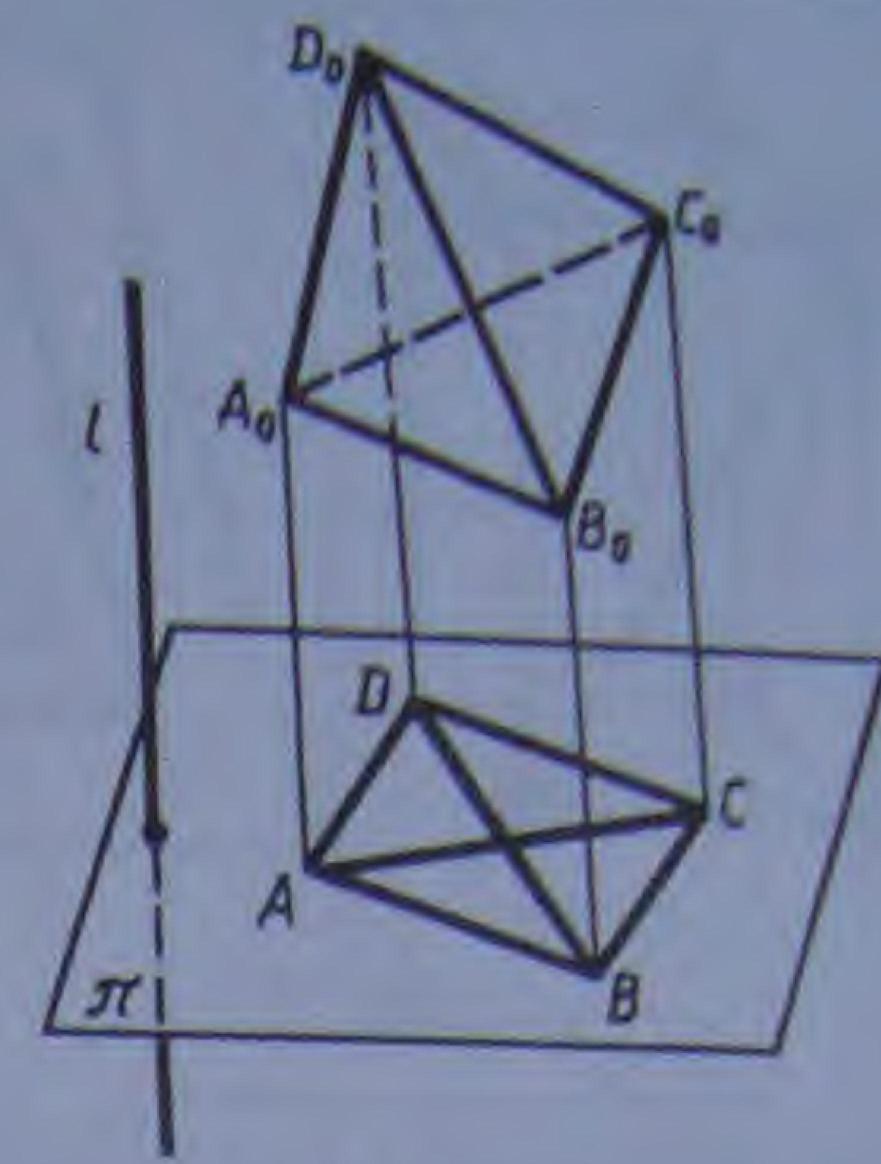
Շրջանագիծ

Շրջանագծի զուգահեռ պրոյեկցիան կոչվում է **էլիպս** (նկ. 124): Շրջանագիծն էլիպսի մասնավոր դեպքն է, քանի որ շրջանագծի պրոյեկցիան իր հարթությանը զուգահեռ հարթության վրա շրջանագիծ է, ընդ որում՝ տրվածին հավասար (բացատրեք՝ ինչու): Զուգահեռ պրոյեկտման հատկություններից հետևում է, որ տրված շրջանագծի O կենտրոնի պրոյեկցիան էլիպսի համաչափության կենտրոնն է (O' կետը նկար 124-ում): Այդ կետն անվանում են **էլիպսի կենտրոն**:

Այսպիսով՝ շրջանագծի գծապատկերը էլիպս է, ընդ որում՝ շրջանագծի կենտրոնի գծապատկերը էլիպսի կենտրոնն է:



Նկ. 124



Նկ. 125

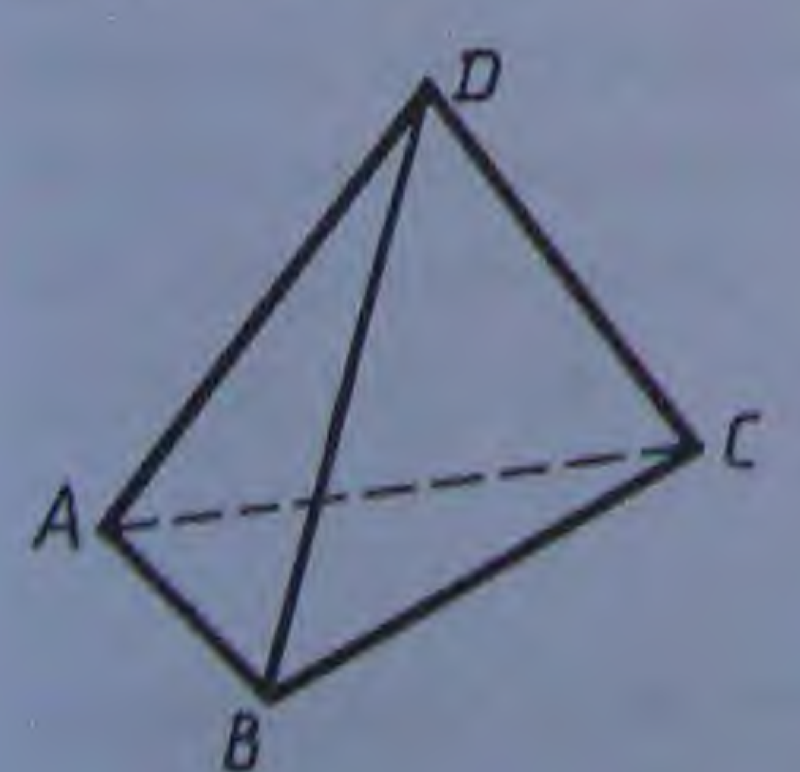
Էլիպսն օգտագործվում է, երբ հարթության վրա գծապատկերվում է գլան, կոն, հատած կոն և գնդային մակերևույթ (այդ պատկերները ուսումնասիրվում են 10-րդ դասարանի դասընթացում): Էլիպսի հասկացությունը հաճախ է հանդիպում նաև բնագիտական հետազոտություններում: Օրինակ՝ մոլորակների շարժումները Արեգակի շուրջ ընթանում են էլիպսաձև ուղեծրերով:

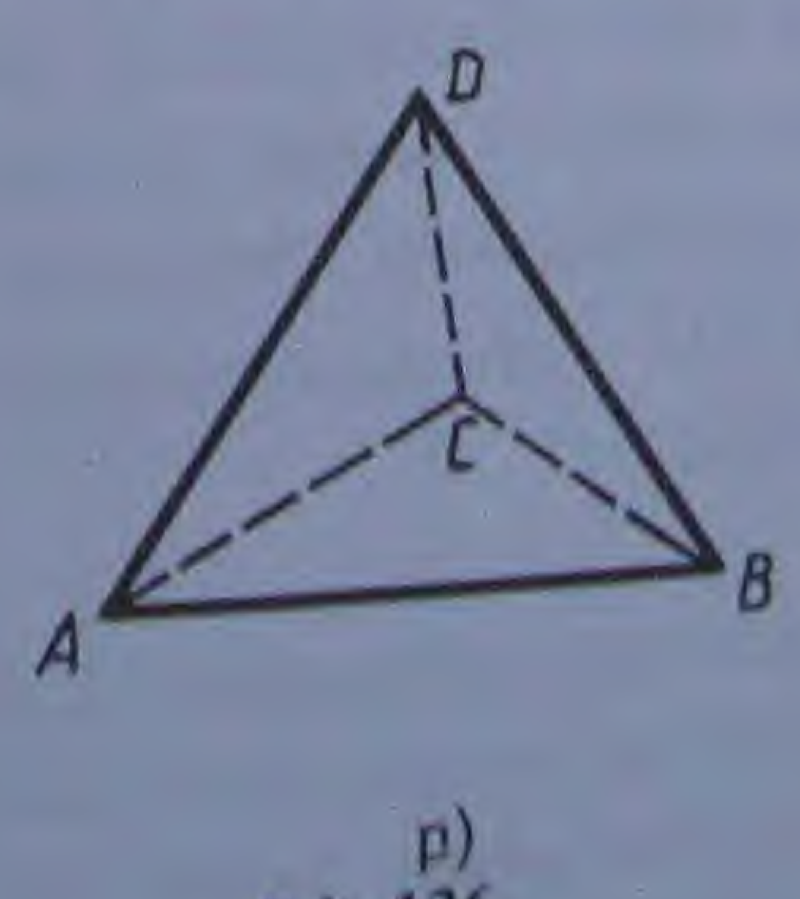
4 Տարածական պատկերների գծապատկերումը

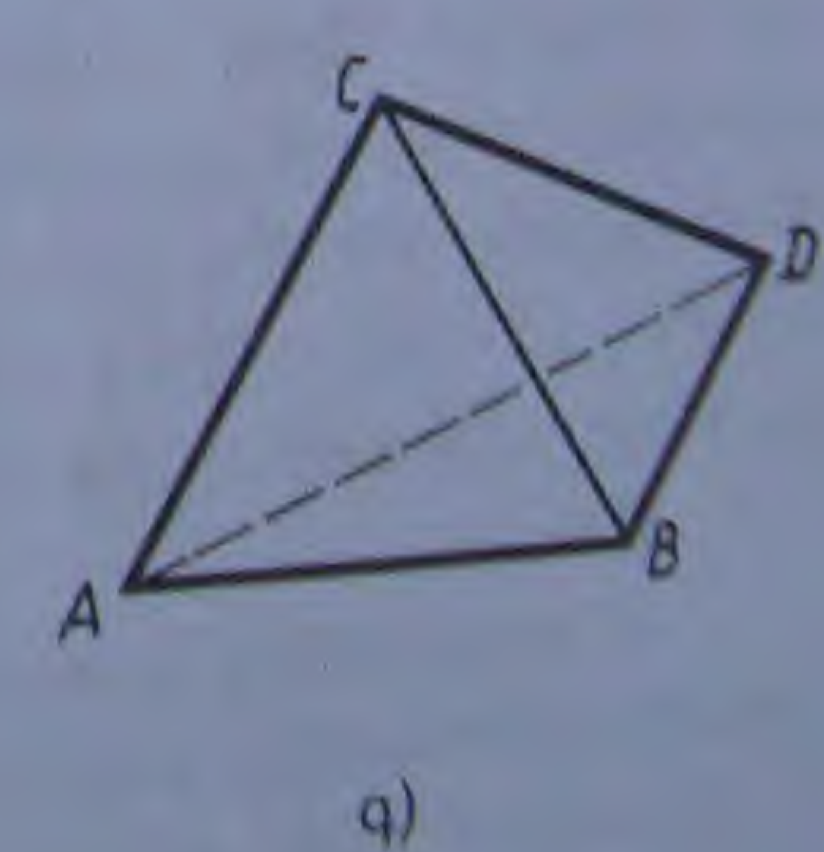
Այժմ դիտարկենք մի քանի բազմանիստերի՝ հարթության վրա գծապատկերումն այն դեպքի համար, երբ դրանց նիստերի հարթություններից ոչ մեկը զուգահեռ չէ պրոյեկտման ուղղությանը: Այս դեպքում ասելով բազմանիստի գծապատկեր՝ կհասկանանք մի պատկեր, որը կազմված է նրա բոլոր կողերի պրոյեկցիաներից:

Քառանիստ

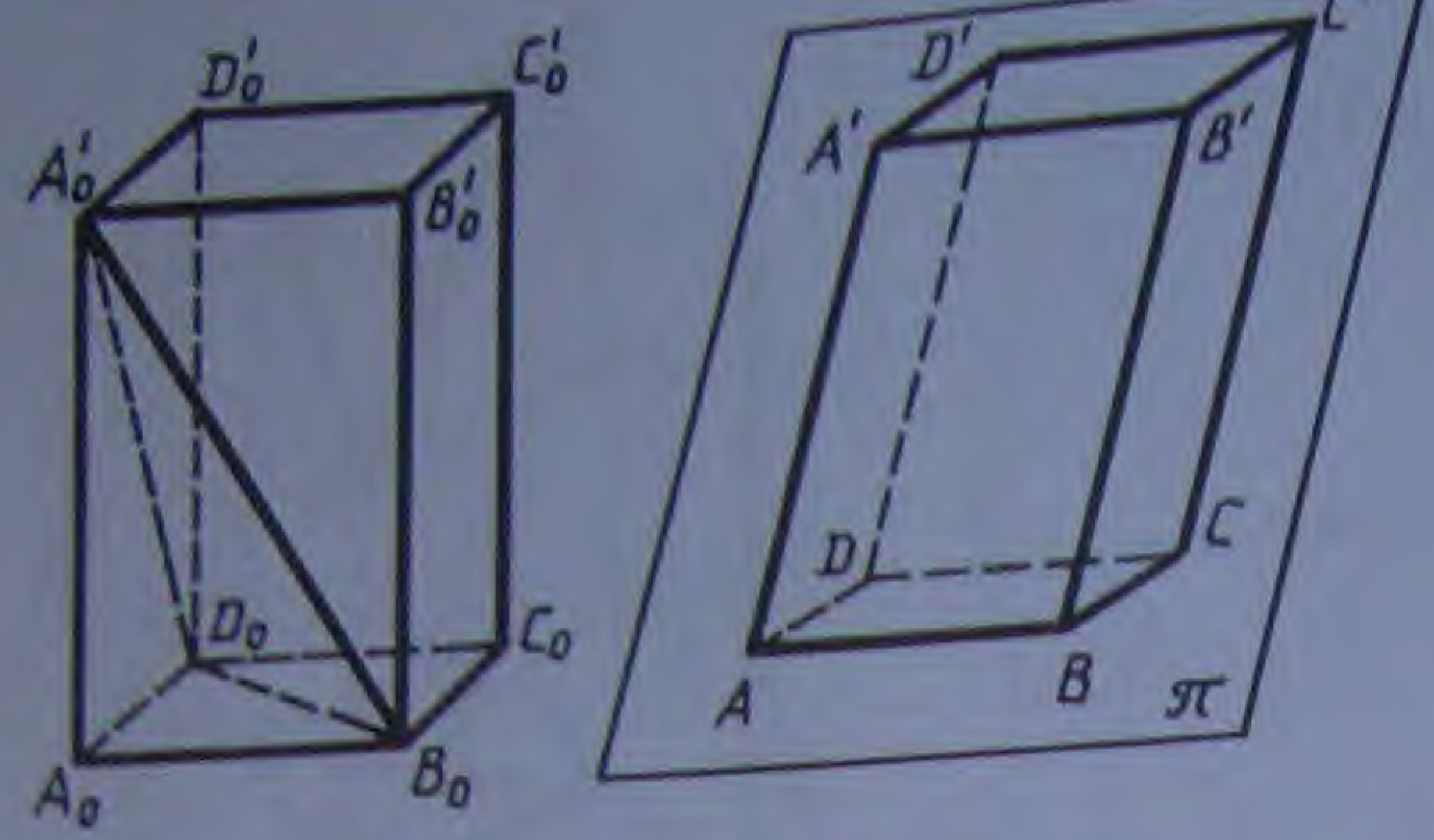
Դիցուք՝ $A_0B_0C_0D_0$-ն կամայական քառանիստ է, իսկ A-ն, B-ն, C-ն և D-ն նրա գագաթների զուգահեռ պրոյեկցիաներն են գծապատկերման հարթության վրա (նկ. 125): AB, BC, CA, AD, BD, CD հատվածները $ABCD$



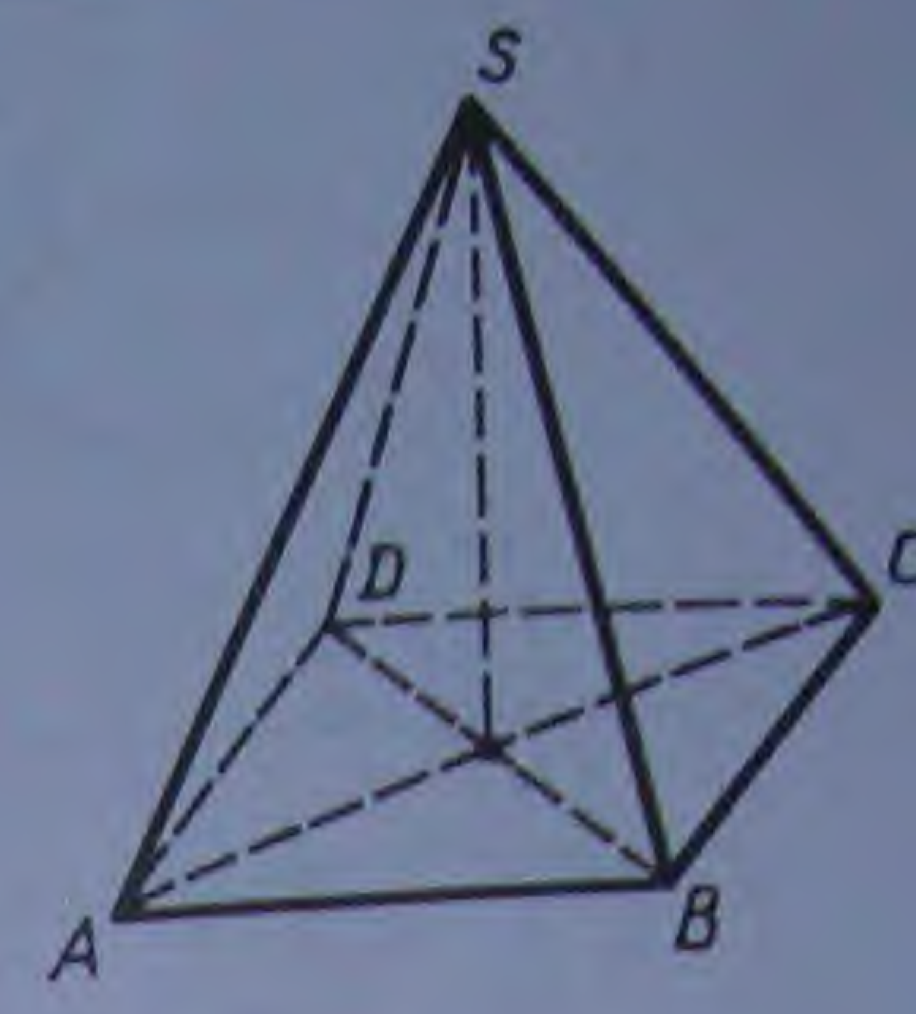




Նկ. 126



Նկ. 127



Նկ. 128

քառանկյան կողմերն ու անկյունագծերն են: Այդ հատվածներով կազմված պատկերը (ինչպես նաև կամայական պատկեր, որ նման է դրան) $A_0B_0C_0D_0$ քառանիստի գծապատկերն է:

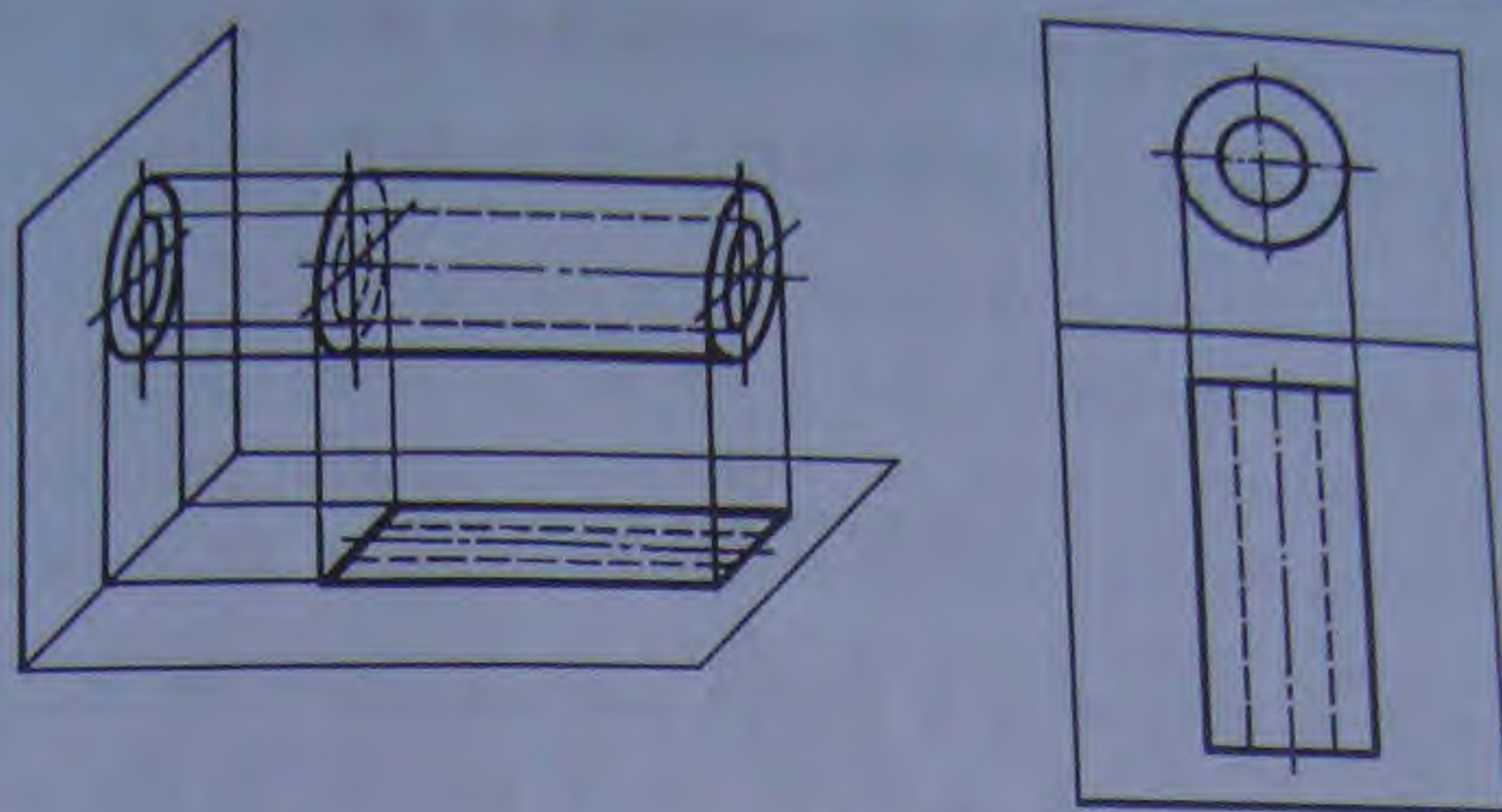
Կարելի է ապացուցել, որ կամայական (ուռուցիկ կամ ոչ ուռուցիկ) քառանկյան կողմերով և անկյունագծերով կազմված պատկերը՝ գծապատկերման հարթության ու պրոյեկտման ուղղության համապատասխան ընտրության դեպքում ներկայացնում է քառանիստի գծապատկեր (նկ. 126,ա,բ,գ): (Այդ նկարներում չերևացող կողերը պատկերված են ընդհատ գծերով:)

Զուգահեռանիստ

Կամայական $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$ զուգահեռանիստի գծապատկեր կառուցելու համար նկատենք, որ A_0, B_0, D_0 և A_0' կետերը կարելի է դիտել որպես $A_0B_0D_0A_0'$ քառանիստի գագաթներ (նկ. 127): Ուրեմն՝ իբրև դրանց գծապատկերներ կարելի է վերցնել կամայական $ABDA'$ քառանկյան գագաթները: Այլ խոսքով՝ գծապատկերման հարթության կամայական երեք՝ AB, AD և AA' հատվածներ, որոնք ունեն ընդհանուր A ծայրակետ, և որոնցից ցանկացած երկուսն ընկած չեն մի ուղղի վրա, կարելի է համարել որպես զուգահեռանիստի A_0B_0, A_0D_0 և A_0A_0' կողերի գծապատկերներ: Բայց այդ դեպքում մյուս կողերի գծապատկերները կառուցվում են միարժեք կերպով. քանի որ զուգահեռանիստի բոլոր նիստերը զուգահեռագծեր են, հետևաբար, նրանց գծապատկերները նույնպես զուգահեռագծեր են: Նկար 127-ում $ABCDA'B'C'D'$ զուգահեռանիստը $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$ զուգահեռանիստի գծապատկերն է:

Բուրգ

Բուրգի հիմքի գծապատկերը կառուցվում է ըստ կետ 3-ում նկարագրված կանոնների, իսկ որպես գագաթի գծապատկեր կարելի է ընդունել կամայական կետ, որը չի պատկանում հիմքի գծապատկերի կողմերին: Նկար 128-ում տրված է կանոնավոր $S_0A_0B_0C_0D_0$ այն բուրգի գծապատ-



Նկ. 129

կերը, որի հիմքը $A_0B_0C_0D_0$ քառակուսին է: Նրա հիմքի գծապատկերը $ABCD$ զուգահեռագիծն է:

Պ ա ր զ ա բ ա ն ու մ

Պատկերի զուգահեռ պրոյեկցիայի մասնավոր դեպք է **ուղղանկյուն պրոյեկցիան** (տես կետ 21-ը): Ուղղանկյուն պրոյեկցիաները լայն կիրառություն ունեն տեխնիկական գծագրության մեջ: Որոշ մանրակներ, սովորաբար, պրոյեկտվում են երկու հարթությունների վրա՝ հորիզոնական և ուղղահայաց, երկու պրոյեկցիաներն էլ պատկերվում են գծագրի հարթության վրա: Նկար 129-ում պատկերված են գլանաձև սռնակալի երկու պրոյեկցիաները:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

ՆԱԽԱԲԱՆ

3. ա) Այո, բ) ոչ, գ) ոչ, դ) ոչ: **5.** Անվերջ բազմությամբ: **7.** Ոչ: Ցուցում: Օգտվեք U_2 աքսիոմից: **8.** ա) Ոչ, բ) այո: **9.** Այո: **10.** ա) Այո, բ) ոչ: **12.** Այո: **13.** ա) Ոչ, բ) ոչ, գ) այո: **14.** Երեք հարթություն, եթե ուղիղները մի հարթության մեջ չեն, և մեկ հարթություն, եթե ուղիղները մի հարթության մեջ են:

ԳԼՈՒԽ I

17. 26սմ: **18.** ա) 3,5սմ, բ) 12սմ: **20.** Ոչ: **27.** 48սմ: **28.** $8\frac{1}{3}$սմ: **29.** 6սմ:

33. Ցուցում: Ենթադրենք α-ն, β-ն և γ-ն տրված հարթություններն են, իսկ a-ն α և β հարթությունների հատման գիծն է: Դիտարկեք a ուղղի և γ հարթության փոխադարձ դասավորվածությունը: **34.** ա), բ) Հատվում են, գ), դ) զուգահեռ են, ե), զ) խաչվող են: **37.** ա) Հատվում են, բ) խաչվող են: **40.** ա) Ոչ, բ) այո, MN ուղիղը: **41.** Ոչ: **42.** ա) Զուգահեռ են, բ) 100սմ: **44.** ա) 40^0, բ) 45^0, գ) 90^0: **45.** ա) 50^0, բ) 59^0: **46.** ա) 90^0, բ) 64^0: **49.** Ոչ: **54.** բ) 12սմ^2: **56.** Ցուցում: Օգտվեք խնդիր 55-ի լուծումից: **57.** Ցուցում: Օգտվեք խնդիր 56-ի լուծումից: **60.** Ցուցում: Օգտվեք խնդիր 58-ի լուծումից: **63.** ա) AA_2=18սմ, AB_2=15սմ, բ) A_2B_2=54սմ, AA_2=72սմ: **65.** ա) Զուգահեռագծեր են: **66.** Երեք զույգ: **67.** ա) ≈17սմ, ≈23սմ, ≈29սմ, բ) ≈146սմ^2, ≈210սմ^2, ≈180սմ^2: **72.** Ցուցում: ա) Նկատի ունեցեք, որ հատող հարթությունն անցնում է քառանիստի DB և DC կողերի միջնակետերով, բ) հաշվի առեք, որ հատող հարթության և քառանիստի կողմնային նիստերի հատում-

ներից առաջացած հատվածները զուգահեռ են ABC եռանկյան համապատասխան կողմերին: **73.** 22սմ: **74.** բ) $\frac{4}{9}$: **75.** բ) 6սմ^2: **77.** 8սմ, 10սմ, 12սմ: **79.** ա) ABC_1D_1 զուգահեռագիծը, բ) ACC_1A_1 զուգահեռագիծը: **81.** ա) MN և BC, բ) AM և A_1B_1 ուղիղների հատման կետը: **82.** *Ցուցում:* Խնդիրը լուծվում է 14 կետի 2 խնդրի լուծմանը համանման: **83.** *Ցուցում:* Նախ կառուցեք այն հատվածը, որով հատող հարթությունը հատում է. ա) AA_1D_1D նիստը, բ) ABCD նիստը: **84.** *Ցուցում:* Նախ կառուցեք այն հատվածը, որով հատող հարթությունը հատում է ABCD նիստը: **85.** BKD_1L զուգահեռագիծը: **86.** *Ցուցում:* Նախ կառուցեք հատող հարթության և DD_1 կողի հատման կետը: **87.** *Ցուցում:* Նախ կառուցեք այն հատվածը, որով հատող հարթությունը հատում է. ա) BCC_1B_1 նիստը, բ) AA_1D_1D նիստը: **88.** բ) 12սմ: **90.** CD ուղիղը. ա) զուգահեռ է α հարթությանը, բ) հատում է α հարթությունը: **92.** *Ցուցում:* Կիրառեք կետ 6-ի հատկություն 2^0-ը: **93.** MN և b ուղիղները խաչվող են: **94.** Այո: **95.** *Ցուցում:* Օգտվեք խնդիր 55-ի լուծումից: **98.** Գոյություն ունի միայն մեկ հարթություն: **100.** *Ցուցում:* Օգտվեք կետ 7-ի երկրորդ թեորեմից և խնդիր 59-ի լուծումից: **102.** $10(2\sqrt{3}+1)$սմ և $25\sqrt{11}$ սմ^2: **103.** $4\frac{4}{9}$սմ^2: **108.** *Ցուցում:* Նախապես ապացուցեք, որ ADA_1, BDB_1 և CDC_1 հարթությունների հատումը ուղիղ է: **112.** *Ցուցում:* Հաշվի առեք, որ զուգահեռագծի անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է նրա կողմերի քառակուսիների գումարին: **113.** BD_1 ուղիղը:

Գ Լ Ո Ւ Խ II

118. $\angle AOB$, $\angle MOC$ և $\angle DOA$: **120.** $\frac{\sqrt{4b^2+2a^2}}{2}$: **121.** 13սմ:

122. KA=KB=20սմ, DA=DB=32սմ: **125.** 9սմ: **126.** Ուղղանկյուն:

130. ա) $MA=\sqrt{m^2+n^2}$, $MB=m$, $MC=\sqrt{m^2+n^2}$, $MD=\sqrt{m^2+2n^2}$,

բ) $\sqrt{m^2+\frac{1}{2}n^2}$, m: **136.** Ցուցում: Օգտվեք խնդիր 134-ի լուծումից: **138.** ա) $\frac{d}{\cos\varphi}$, $dtg\varphi$, բ) $m\cos\varphi, m\sin\varphi$: **140.** 3սմ: **141.** 3սմ: **142.** 2,5սմ կամ 1,5սմ: **143.** 2սմ: **145.** բ) $\sqrt{a^2+b^2}$: **146.** Ցուցում: Օգտվեք երեք ուղղահայացների մասին թեորեմից և դրա հակադարձ թեորեմից: **149.** 4սմ և $4\sqrt{10}$ սմ: **150.** ա) 2սմ, բ) $4\sqrt{2}$ սմ: **152.** 8դմ, 8դմ, $4\sqrt{5}$ դմ, $4\sqrt{5}$ դմ, 8դմ, $6\sqrt{2}$ դմ: **154.** ա) 15սմ, բ) 75սմ^2: **155.** 6սմ: **156.** $\sqrt{n^2+m^2\sin^2\varphi}$: **157.** բ) 5,1դմ: **158.** 12,5սմ, 12,5սմ, 25սմ, 25սմ: **160.** 12սմ: **161.** Ցուցում: A կետից տարեք ուղղահայացներ BC ու BD ուղիղներին և CBD հարթությանը: **163.** ա) $\frac{d\sqrt{2}}{2}$, բ) $\frac{d}{2}$, գ) $\frac{d\sqrt{3}}{2}$: **164.** 60^0: **165.** 3d: **168.** $\frac{d}{\sin\varphi}$: **170.** 1սմ և $\frac{\sqrt{2}}{2}$ սմ: **171.** 45^0: **172.** $6\sqrt{3}$ սմ: **173.** 90^0, 45^0 և 60^0: **174.** 60^0: **175.** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha\approx70^032'$: **176.** $8\sqrt{2}$: **179.** Ցուցում: Օգտվեք խնդիր 178-ի լուծումից: **180.** Ցուցում: Օգտվեք խնդիր 179-ի լուծումից: **182.** բ) $\sqrt{m^2+n^2}$:**184.** ա) $5\sqrt{6}$ սմ, բ) $5\sqrt{2}$ սմ: **187.** ա) $\sqrt{6}$, բ) 17, գ) 13: **188.** $a\sqrt{3}$: **189.** ա) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$, բ) $\frac{d\sqrt{3}}{2}$: **190.** ա) 90^0, բ) 45^0, գ) $tg\varphi=\frac{1}{2}$, $\varphi\approx26^034'$: **192.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$: **193.** ա) $\sqrt{d^2-m^2}$, բ) $\sqrt{m^2-n^2}$, գ) $\frac{n\sqrt{m^2-n^2}}{m}$: **194.** ա) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, բ) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$: **195.** 6սմ, 6սմ և $6\sqrt{2}$ սմ: **198.** 4սմ: **199.** Ցուցում: Դիցուք O կետը S կետի պրոյեկցիան է եռանկյան հարթության վրա: Ապացուցեք, որ O կետը համընկնում է M-ին: **201.** 90^0: **202.** $5\sqrt{3}$ սմ: Ցուցում:

Օգտվեք խնդիր 199-ի լուծումից: **203.** 5սմ: **204.** ա) $\frac{a}{\sin\varphi}$, $\frac{a}{2tg\varphi}\sqrt{1+4tg^2\varphi}$, բ) $\frac{2\pi a}{tg\varphi}$, գ) $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4tg^2\varphi}$: **205.** 3,5դմ²: **206.** 25սմ: **207.** 8սմ: **208.** $9\sqrt{6}$ սմ: **209.** B կետի հեռավորությունն α հարթությունից փոքր է, քան C կետի հեռավորությունն այդ հարթությունից: **211.** $a\sqrt{2}$: **213.** $\cos\varphi=\frac{1}{3}$, φ≈70°33′: **214.** 60°: **215.** $\frac{1}{2}\sqrt{217}$ սմ: **216.** 2a: **217.** $2\sqrt{122}$ դմ:

Գ Լ Ո Ւ Խ III

219. 13սմ: **220.** 26սմ: **221.** $8\sqrt{21}$ սմ²: **222.** 45°, 135°, 45°, 135°: **223.** 8սմ և $8\sqrt{3}$ սմ: **224.** $16\sqrt{7}$ սմ²: **225.** 45°: **226.** $2\sqrt{3}$ սմ²: **228.** $80\sqrt{2}$ սմ²: **229.** ա) 450սմ² և ≈536սմ², բ) 384դմ² և 672դմ², գ) 69դմ² և ≈97դմ², դ) 0,2մ² և ≈0,8մ²: **230.** 75սմ²: **231.** $20(23+6\sqrt{3})$սմ²: **232.** $2d^2\sin\varphi\left(\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha}+\sin\alpha\right)$: **233.** 180սմ²: **234.** 580սմ²: **235.** $\dfrac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\theta}{\sin\frac{\varphi}{2}}$: **236.** *Ցուցում*: Նկատի ունեցեք, որ թեք պրիզմայի կողմնային նիստերը զուգահեռագծեր են: **237.** 240սմ²: *Ցուցում*: Օգտվեք խնդիր 236-ի լուծումից: **238.** 2016սմ²: **239.** $\sqrt{58}$ սմ, $\sqrt{58}$ սմ, $\sqrt{65}$ սմ, $\sqrt{65}$ սմ: **240.** 768սմ²: **241.** $(2\sqrt{34}+22)$մ²: **242.** ա) $4\sqrt{3}$ սմ, բ) $48(\sqrt{2}+1)$սմ²: **243.** 192սմ²: **244.** 790սմ²: **245.** $8(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$սմ²: **246.** բ) 189սմ²: **248.** $48\sqrt{2}$ սմ²: **250.** $64\sqrt{3}$ սմ²:

251. 13սմ: **252.** 12սմ: **253.** 12սմ: **254.** ա) $\frac{\sqrt{9H^2+3a^2}}{3}$,

բ) $2\arcsin\frac{3a}{2\sqrt{9H^2+3a^2}}$, գ) $arctg\frac{\sqrt{3}H}{a}$, դ) $arctg\frac{2\sqrt{3}H}{a}$,

ե) $2arctg\frac{\sqrt{3H^2+a^2}}{3H}$: **255.** $\frac{4}{tg\frac{\varphi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{3}tg^2\frac{\varphi}{2}}$: **256.** ա) $\frac{m\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$,

բ) $\frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, գ) $\arccos\left(tg\frac{\alpha}{2}\right)$, դ) $2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$: **257.** $3\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)h^2$:

258. $72\left(1+\sqrt{7}\right)$սմ^2: **259.** $3\sqrt{5}$ սմ: **263.** ա) Սեղան: **264.** $3a^2$: **265.** 54սմ^2:

266. 13դմ^2: **268.** $\sqrt{7}$ դմ: **269.** $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ դմ, $\sqrt{3}$ դմ: **270.** 16սմ^2: **276.** ա) Մեկ, բ) չունի, գ) չունի, դ) մեկ: **277.** ա) Անվերջ բազմությամբ, բ) երեք, գ) ինը: **278.** ա) Հինգ, բ) չորս, գ) երեք կամ վեց: **279.** 60^0: **280.** Կից նիստերի անկյունագծերով անցնող հատույթի մակերեսը հավասար է $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$: Հանդիպակաց նիստերի անկյունագծերով անցնող հատույթի մակերեսը հավասար է $a^2\sqrt{2}$: **281.** $\sqrt{3}$: **282.** 90^0: **283.** ա) $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$, բ) $\frac{a^2\sqrt{2}}{9}$:

284. Կանոնավոր ութանիստ: **286.** ա) $m=\frac{\sqrt{6}}{2}h$, բ) $n=\frac{1}{3}m$: **7.** ա) $a\sqrt{2}$, բ) $\frac{\sqrt{2}}{3}a$, գ) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$: **290.** $2\sqrt{2}\ell^2\frac{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\theta}\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)}$:

291. $2d^2\sin\varphi\left(\cos\theta+\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)}\right)$: **292.** 4,8սմ: **294.** $4\sqrt{S_o^{\,2}-a^4}$ կամ $2\sqrt{2}S_o$: **296.** $\frac{\sqrt{3}h^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$: Ցուցում: Նկատեք, որ որոնելի

հատույթը սեղան է: **298.** $2a^2+2a\sqrt{4b^2-a^2}$: **299.** 0,5մ:

300. Ուղղանկյուն, $S=\dfrac{ab}{4}$: **301.** $4\sqrt{6}$ սմ: **302.** 5սմ, 5սմ, 6սմ, 6սմ:

303. $288\left(3+\sqrt{3}\right)$սմ^2: **305.** $2h^2tg\alpha$: **306.** $4h^2tg^2\varphi\left(1+\dfrac{1}{\sin\varphi}\right)$:

307. ա) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}ab$: **308.** 4սմ, 4սմ, 4սմ, 4սմ: **309.** $\dfrac{80}{3}$դմ^2: **310.** 540սմ^2:

311. ա) 315սմ^2, բ) 7,2սմ: **312.** $tg\varphi\cos\dfrac{180^0}{n}$: **313.** 54դմ^2: **314.** 56սմ, 24սմ: **319.** Երեք:

ԳԼՈՒԽ IV

320. ա) 3սմ, 4սմ, 5սմ, 1,5սմ, 2սմ, 2,5սմ, բ) 4սմ, 3սմ, 5սմ, 2սմ, 2,5սմ:
321. ա) 12սմ, 8սմ, 9սմ, բ) 15սմ, $\sqrt{145}$ սմ, 17սմ:
323. ա) $\vec{MN}=\vec{QP}$, $\vec{QM}=\vec{PN}$, $\vec{DP}=\vec{PC}$, բ) քառակուսի: **324.** ա) Այո, բ) այո, գ) ոչ: **325.** ա) Զուգահեռ են կամ համընկնում են, բ) ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը կամ ընկած է նրա վրա, գ) հարթությունները զուգահեռ են, հատվում են կամ համընկնում են: **326.** ա) $\vec{CC_1}$, բ) $\vec{DK}$, գ) $\vec{A_1C_1}$, դ) $\vec{C_1B_1}$, ե) $\vec{MB_1}$: **327.** ա) $\vec{AC}$, բ) $\vec{AC_1}$, գ) $\vec{C_1B}$, դ) $\vec{DB_1}$, ե) $\vec{DC_1}$: **329.** ա) $\vec{BC}, \vec{AD}, \vec{A_1D_1}, \vec{B_1C_1}$, բ) $\vec{AB_1}, \vec{DC_1}$, գ) $\vec{CD}, \vec{BA}$, $\vec{B_1A_1}, \vec{C_1D_1}$, դ) $\vec{B_1A_1}, \vec{C_1D_1}, \vec{CD}, \vec{BA}$: **333.** ա) $\vec{0}$, բ) $\vec{DB}$: **335.** ա) $\vec{PQ}$, բ) $\vec{AK}$, գ) $\vec{CP}$, դ) $\vec{0}$, **336.** ա) $\vec{AC}-\vec{DC}-\vec{BD}$, բ) $\vec{DC}+\vec{CB}-\vec{DA}$, գ) $-\left(\vec{DA}+\vec{CD}+\vec{BC}\right)$: **337.** ա) $\vec{AD}+\vec{OE}$, բ) $\vec{AK}$, գ) $\vec{0}$: **338.** Ցուցում:

Նկատեք, որ $\vec{OA}-\vec{OA_1}=\vec{OC}-\vec{OC_1}$: **339.** ա) $\vec{C_1B}$, բ) $\vec{AC}$: **340.** ա) $\vec{AC}$, բ) $\vec{CB}$, գ) $\vec{BC}$: **344.** ա) −1, բ) 2, գ) $-\frac{1}{2}$: **345.** ա) $-2\vec{EF}$, բ) $-\frac{1}{2}\vec{DC}$:

346. $-\frac{1}{2}\left(\vec{AD}+\vec{BC}\right)$: **347.** ա) $5\vec{n}-9\vec{m}$, բ) $2\vec{p}-13\vec{m}-3\vec{n}$: **355.** ա), գ):

356. Այո: **358.** ա) $\vec{AC_1}$, բ) $\vec{DB_1}$, գ) $\vec{DB_1}$, դ) $\vec{A_1C}$, ե) $\vec{BD_1}$:

359. ա) $\vec{BD_1}=\vec{BA}+\vec{BC}+\vec{BB_1}$, բ) $\vec{B_1D_1}=\vec{A_1A}-\vec{A_1B}+\vec{A_1D_1}$:

360. ա) $-\frac{kq}{a^3}\vec{AC_1}$, $\frac{\sqrt{2}kq}{2a^3}\vec{AC_1}$, բ) $\frac{kq}{3a^2}\sqrt{19+4\sqrt{3}}$, $\frac{kq}{3a^2}\sqrt{19+4\sqrt{3}}$, $\frac{2kq}{9a^2}\sqrt{105}$, $\frac{4kq}{3a^2}$: **361.** $\vec{CD}=0\cdot\vec{AA_1}-\vec{AB}+0\cdot\vec{AD}$, $\vec{D_1O}=-\frac{1}{2}\vec{AA_1}+\frac{1}{2}\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{AD}$: **363.** $\vec{OD}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}+0\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$:

364. $\vec{AK}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$, $\left|\vec{AK}\right|=\frac{3}{2}m$: **365.** $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+0\cdot\vec{C}$, $\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$:

367. $\vec{DK}=0{,}7\vec{DA}+0{,}15\vec{DB}+0{,}15\vec{DC}$: **368.** ա) $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}$, բ) $\vec{CM}=-\frac{1}{2}\vec{AB}-\vec{AD}$, գ) $\vec{C_1N}=-\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{AD}$, ե) $\vec{A_1N}=0\cdot\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD}$, է) $\vec{MD}=-\frac{1}{2}\vec{AB}+\vec{AD}$: **369.** $\vec{OA}=3\vec{OM}-\vec{OB}-\vec{OC}$: **370.** ա) $\vec{DN}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$, բ) $\vec{DK}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$, գ) $\vec{AM}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$, դ) $\vec{MK}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{12}\vec{b}-\frac{1}{12}\vec{c}$: **371.** *Ցուցում:* Օգտվեք խնդիրներ 350-ի և 366-ի լուծումներից: **373.** Ոչ: *Ցուցում:* Նախ ապացուցեք, որ M_1-ը $A_1B_1C_1$ եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է, որից հետո օգտվեք խնդիր 366-ի լուծումից: **379.** ա) $\vec{AC}$, բ) $\vec{AB}$, գ) $\vec{O}$: **380.** ա) $\vec{AD_1}$, բ) $\vec{AC_1}$, գ) $\vec{DB}$: **381.** *Ցուցում:* Նախ ապացուցեք, որ $\vec{AB}=\vec{A_1B_1}$,

$\vec{BC}=\vec{B_1C_1}$, $\vec{CA}=\vec{C_1A_1}$: **382.** ա) Ցանկացած k-ի համար, բ) k≥0, գ) k<0, դ) k=–1: **386.** Ցուցում: Նախ ապացուցեք, որ $\vec{MO}=\frac{1}{4}\left(\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}\right)$: **387.** ա) $3\vec{ON}-2\vec{OM}$, բ) $2\vec{OM}-\vec{ON}$, գ) $k\cdot\vec{ON}+(1-k)\cdot\vec{OM}$: **389.** Նախ ապացուցեք $\vec{A_1B_1}$, $\vec{A_2B_2}$ և $\vec{A_3B_3}$ վեկտորների համահարթ լինելը: **390.** ա) $\frac{3}{2a^2}kq$, բ) $\frac{\sqrt{143+10\sqrt{10}}}{5\sqrt{5}a^2}kq$, գ) $\frac{4}{9a^2}kq$, դ) $\frac{4\sqrt{737}}{27a^2}kq$: **391.** $\vec{AK}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$: **392.** $\vec{AC_1}=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{CA_1}=-\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{BD_1}=\vec{q}-\vec{p}+\vec{r}$, $\vec{DB_1}=-\vec{q}+\vec{p}+\vec{r}$: **393.** ա) $\vec{AK}=\vec{AB}+\vec{AD}+\frac{1}{2}\vec{AA_1}$, բ) $\vec{DA_1}=\vec{AB_1}-\vec{BC_1}+\vec{CD_1}$: **394.** $\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\vec{AD}+\frac{1}{2}\vec{AA_1}$: **395.** Նախ ապացուցեք, որ $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$ և $\vec{CC_1}$ վեկտորները համահարթ են: **396.** $\vec{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, $\vec{CD}=\vec{d}-\vec{c}$, $\vec{DB}=\vec{b}-\vec{d}$, $\vec{DM}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{d}$: **397.** $\frac{1}{3}$: **398.** Ցուցում: Օգտվեք խնդիր 366-ի լուծումից: **399.** Ցուցում: Օգտվեք խնդիր 397-ի լուծումից:

Դ ժ վ ա ր ի ն   խ ն դ ի ր ն ե ր

400. Տրված ուղիղներին զուգահեռ հարթության մեջ գտնվող շրջանագիծ: Շրջանագծի շառավիղը հավասար է $\frac{1}{2}\sqrt{d^2-h^2}$, որտեղ h-ը տրված խաչվող ուղիղների հեռավորությունն է, իսկ կենտրոնը տրված ուղիղներից գտնվում է $\frac{h}{2}$ հեռավորության վրա: **401.** Ցուցում:

Ապացուցեք, որ այդ բոլոր հատույթները զուգահեռագծեր են, և որոնց պարագծերը հավասար են կողի կրկնակի երկարությանը: **402.** Ցուցում: Ապացուցեք, որ հանդիպակաց կողմերի միջնակետերում գագաթներով քառանկյունը զուգահեռագիծ է, և օգտվեք զուգահեռագծի անկյունագծերի և կողմերի երկարությունները կապող բանաձևից: **403.** Եռանկյան բոլոր անկյունները պետք է լինեն սուր: **404.** BC ուղղին ուղղահայաց հարթության մեջ գտնվող շրջանագիծ, որը կառուցված է BC-ին տարած AD ուղղահայացի վրա, որպես տրամագծի՝ առանց A կետի: **405.** Ցուցում: Դիցուք քառանիստի գագաթը պրոյեկտվում է հիմքի բարձրությունների հատման կետին: Այդ դեպքում քառանիստի ցանկացած կողն ուղղահայաց է հանդիպակաց կողին: Այնուհետև կիրառեք երեք ուղղահայացների թեորեմի հակադարձը: **406.** Ցուցում: Նկատեք, որ O_1-ը ABC եռանկյան բարձրությունների հատման կետն է: **407.** Ցուցում: Օգտվեք 406 խնդրից: **408.** Յոթ: **409.** Ցուցում: Տրված երկնիստ անկյան գծային անկյան կիսորդով և դրա կողով տարեք հարթություն և տրված ուղղի ու այդ հարթության հատման կետը պրոյեկտեք նիստի վրա: Այնուհետև օգտվեք ստացված եռանկյունների հավասարությունից: **411.** Ցուցում: Դիցուք A-ն խորանարդի կամայական գագաթն է, O-ն՝ կենտրոնը, A_1-ը տրված ուղղի վրա A կետի պրոյեկցիան է: Այդ դեպքում $AA_1=OA\sin\varphi$, որտեղ φ-ն OA-ի և OA_1 կազմած անկյունն է: Գրառեք խորանարդի գագաթներից մինչև OA_1 ուղիղը հեռավորությունների քառակուսիների գումարը և օգտվեք կոսինուսների թեորեմից: **412.** Ցուցում: Նշված քառանիստերն ունեն ընդհանուր գագաթ, իսկ դրանց հիմքերը հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուններ են, որոնց էջերը հավասար են խորանարդի կողին: **413.** Ցուցում: Դիտարկեք խորանարդի փռվածքը: **414.** Ցուցում: Որպես

անցքի առանցք վերցրեք խորանարդի անկյունագիծը: **415.** $\frac{25}{16}S$:
416. $\sqrt{2}$ սմ: *Ցուցում*: Օգտվեք այն բանից, որ քառանիստը պետք է գտնվի խորանարդին արտագծած գնդային մակերևույթի ներսում: **417.** *Ցուցում*: Ապացուցեք, որ ստացված բազմանիստի բոլոր գագաթները խորանարդի նիստերի կենտրոններ են: **418.** *Ցուցում*: Վերցրեք զուգահեռանիստի որևէ նիստ, ընտրեք այդ նիստերին հարակից փոքրագույն խորանարդը և պարզեք, թե դրան ինչպես կարելի է կցել մնացած խորանարդները: **419.** *Ցուցում*: Բեկյալի գագաթները պրոյեկտեք ընդհանուր գագաթով երեք կողերի վրա և օգտվեք եռանկյան կողմերի միջև առնչություններից: **420.** *Ցուցում*: f նիստեր, k կողեր և e գագաթներ ունեցող տրված բազմանիստի մակերևույթից անջատելով նիստերից մեկի ներքին տիրույթը կստանաք P_1 բազմանիստ մակերևույթը: Այնուհետև P_1 մակերևույթից անջատելով այն նիստերից մեկը, որն ունի սահմանային կող (այսինքն կող, որը կողմ է միայն այդ նիստի համար), կստանաք P_2 բազմակողմ, որը կողմ է միայն այդ նիստի համար), կստանաք P_2 բազմանիստ մակերևույթը: P_2-ում պահպանված են հեռացված նիստի մյուս նիստերին պատկանող գագաթները և կողերը: Շարունակելով այդ գործընթացը s քայլերից հետո (որտեղ 1<s<f) կստանաք P_s մակերևույթը: Ըստ նիստերի թվի մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցեք, որ $f_s + e_s - k_s = 1$, որտեղ $f_s = f - s$, k_s և e_s թվերը P_s մակերևույթի, համապատասխանաբար, նիստերի, կողերի և գագաթների քանակներն են: Հաշվի առեք, որ դա հավասարություն է, երբ f_s=1, այսինքն երբ s=f-1, իսկ դա ակնհայտ է, քանի որ այդ դեպքում k_s=e_s: s=1 դեպքում ստացվում է որոնելի

(f-1)+e-k=1 հավասարությունը: **421.** Ցուցում: Օգտվեք համաչափու-
թյունից: **422.** Ցուցում: Օգտվեք համաչափությունից: **423.** $\sqrt{\frac{3}{7}}a$, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$: **424.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$: **425.** Ցուցում: Անկյունագծերը որոշող վեկտորները արտահայտեք կողերը որոշող վեկտորների միջոցով: **426.** Ցուցում: Դիտարկեք ընկնող և անդրադարձող ճառագայթների ուղղությունները որոշող վեկտորները: **427.** Երկու լուծում. 45^0 և 135^0: **428.** Ցուցում: Խնդրի պայմանից ելնելով՝ գրեք առնչություններ քառանիստի ընդհանուր ծայրակետով երեք կողերը որոշող վեկտորների համար: **429.** Ցուցում: Դիտարկեք կողմնային կողերի հետ հավասար անկյուններ կազմող վեկտորը և ապացուցեք, որ այն ուղղահայաց է հիմքի երկու կողմերը որոշող վեկտորներին: **430.** Ցուցում: Դիցուք՝ O_1-ը O-ի պրոյեկցիան է ABC հարթության վրա: Ապացուցեք, որ $\vec{O_1A}\cdot\vec{BC}=\vec{BO_1}\cdot\vec{AC}=\vec{CO_1}\cdot\vec{AB}=0$:

Բովանդակություն

ԳԼՈՒԽ II

ԳԼՈՒԽ III

ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԻ ՀԱՄԱՌՈՏ ՏԵՂԵԿԱՏՈՒ

1. Եռանկյուն (կողմերը՝ a, b, c, կողմերի հանդիպակաց անկյունները α, β, γ, կիսապարագիծը՝ p, արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ R, ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ r, մակերեսը՝ S, a կողմին տարված բարձրությունը՝ h_a).

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \qquad S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ *(Հերոնի բանաձևը)*,

$$r = \frac{S}{p}, \qquad R = \frac{abc}{4s},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$ *(կոսինուսների թեորեմը)*,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$ *(սինուսների թեորեմը)*:

2. Ուղղանկյուն եռանկյուն (էջերը՝ a, b, ներքնաձիգը՝ c, ներքնաձիգի վրա էջերի պրոյեկցիաները՝ a_c, b_c).

$$S = \frac{1}{2}ab, \qquad S = \frac{1}{2}ch_c$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}, \qquad R = \frac{c}{2},$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$ *(Պյութագորասի թեորեմը)*,

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}, \qquad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}, \qquad \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c},$$

$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{ctg}\,\beta:$$

3. Հավասարակողմ եռանկյուն.

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \qquad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}:$$

4. Ուռուցիկ քառանկյուն (անկյունագծերը՝ d_1, d_2, անկյունագծերի կազմած անկյունը՝ φ, մակերեսը՝ S).

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi:$$

5. Զուգահեռագիծ (կից կողմերը՝ a, b, կից կողմերի կազմած անկյունը՝ α, a կողմին տարված բարձրությունը՝ h_a).

$$S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi:$$

6. Շեղանկյուն (կողմը՝ a, անկյունը՝ α).

$$S = ah_a = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 :$$

7. Ուղղանկյուն.

$$S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi :$$

8. Քառակուսի (անկյունագիծը՝ d).

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2} :$$

9. Սեղան (հիմքերը՝ a, b, բարձրությունը՝ h, միջին գիծը՝ ℓ).

$$\ell = \frac{a+b}{2}, \qquad S = \frac{a+b}{2} h = \ell h :$$

10. Արտագծյալ բազմանկյուն (կիսապարագիծը՝ p, ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ r).

$$S = pr :$$

11. Կանոնավոր բազմանկյուն (կանոնավոր n-անկյան կողմը՝ a_n, արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ R, ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ r).

$$a_3 = R\sqrt{3}, \qquad a_4 = R\sqrt{2}, \qquad a_6 = R,$$

$$S = \frac{n a_n r}{2} :$$

12. Շրջանագիծ, շրջան (շառավիղը՝ R, շրջանագծի երկարությունը՝ C, շրջանի մակերեսը՝ S).

$$C = 2\pi R, \qquad S = \pi R^2 :$$

13. Սեկտոր (աղեղի երկարությունը՝ ℓ, աղեղի աստիճանային չափը՝ n^0).

$$\ell = \frac{\pi R n}{180}, \qquad S = \frac{\pi R^2 n}{360} :$$

14. Եռանկյունաչափական բանաձևեր.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\alpha \neq 90^0),$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\alpha \neq 0^0, 180^0):$$

15. Բերման բանաձևեր.

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha, \qquad \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\sin(90^0 + \alpha) = \cos\alpha, \qquad \cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha :$$

Աթանասյան Լևոն Սերգեյի
Բուտուզով Վալենտին Ֆյոդորի
Կադոմցև Սերգեյ Բորիսի
Կիսելյովա Լյուդմիլա Սերգեյի
Պոզնյակ Էդուարդ Գենրիխի

Հրատարակումը նախապատրաստվել է
ակադեմիկոս ***Ա. Ն. Տիխոնովի*** գիտական ղեկավարությամբ

Երկրաչափություն

Հանրակրթական դպրոցի **9**-րդ դասարանի դասագիրք

Թարգմանված է ռուսերեն 9-րդ հրատարակությունից

Թարգմանությունը, փոխադրումը և խմբագրումը՝
Սարիբեկ Հակոբյանի
Մեթոդական մշակումը՝ **Ռիտա Խաչատրյանի**
Խորհրդատվությունը՝ **Սամվել Հարությունյանի**
Համակարգչային ձևավորումը՝ **Գոհար Խաչատրյանի**

Հրատարակիչ-տնօրեն՝ Ս. Հ. Չունգուրյան
Վերստուգող սրբագրիչ՝ Ռ. Ս. Հակոբյան
Հրատարակ. պատասխանատու՝ Ս. Ի. Ապրեսյան

«Աստղիկ գրատուն» հրատարակչություն (Երևան, Նորք, 2-րդ նրբանցք, տ. 32)
Տպագրված է «Տիգրան Մեծ» հրատարակչության տպարանում